Theorie Wiskunde Ontbinden in factoren

Vergelijkingen oplossen m.b.v. ontbinden in factoren

Bij het oplossen van tweedegraads (of hogere graads) vergelijkingen gebruik je een belangrijke eigenschap van vermenigvuldigen.

Als **a · b = 0**, dan geldt:
a = 0 of **b = 0**

Dat betekent dat als een **product** (het resultaat van een vermenigvuldiging) de waarde nul heeft, minstens één van de **factoren** (de 'dingen' die je met elkaar vermenigvuldigt) nul moet zijn.
Dit kun je gebruiken om vergelijkingen op te lossen.

Voorbeeld
$x \cdot (x + 1) = 0$

Je hebt hier te maken met twee factoren: **x** en **x + 1**.
Eén van deze twee factoren moet nul zijn, dus:
x = 0 of **x + 1 = 0**
Conclusie: **x = 0** of **x = -1**.

Niet alle vergelijkingen bestaan natuurlijk uit een product, maar vaak kun je er voor zorgen dat er wel een product komt te staan.

Voorbeeld
$x^2 + x = 0$
kun je schrijven als:
$x \cdot (x + 1) = 0$
Deze bewerking heet **ontbinden** (in factoren).
Je hebt de vergelijking $x^2 + x = 0$ herschreven als een product dat de waarde nul heeft. Dit laatste type vergelijkingen kun je oplossen met de 'eigenschap' van producten (zie boven).

Voordat je gaat ontbinden moet je de vergelijking **op nul herleiden**.

Voorbeeld
$x^3 = 2x^2$
$x^3 - 2x^2 = 0$
$x^2 \cdot (x - 2) = 0$
$x^2 = 0$ of $x - 2 = 0$
$x = 0$ of $x = 2$

Samengevat:

- Eerst op nul herleiden
- Ontbinden in factoren
- Gebruik "Als **a · b = 0**, dan **a = 0** of **b = 0**"

Ontbinden in factoren

Bij tweedegraads verdelijkingen zijn er twee soorten van ontbinden in factoren:

- Een zo groot mogelijke term buiten haakjes halen.

Theorie Wiskunde Ontbinden in factoren

- Van een drieterm een product van 2 tweetermen maken.

Deze laatste soort staat wel bekend onder de naam **product-som methode** of **som-product methode**.

Voorbeeld
$x^2 + 8x + 12$ kun je ontbinden als $(x + 6)(x + 2)$.
Controle:
$(x + 6)(x + 2) = x^2 + 2x + 6x + 12 = x^2 + 8x + 12$
Klopt!

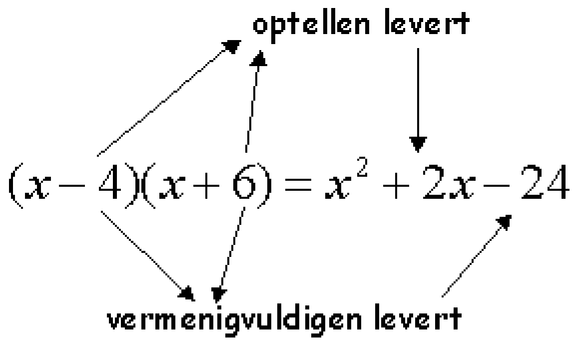
De vraag is nu: **hoe kun je zo'n ontbinding vinden?**

Laten we eens kijken naar wat voorbeelden:
$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$
$(x + 2)(x-3) = x^2 - x - 6$
$(x + 1)(x - 4) = x^2 - 3x - 4$
$(x - 4)(x - 4) = x^2 - 8x + 16$
$(x - 3)(x + 3) = x^2 - 9$

Als het goed is vallen er twee dingen op:

- Het getal voor de **x** aan de rechter kant is de som (optellen dus) van de twee getallen aan de linker kant.
- Het getal aan de rechter kant is het product (vermenigvuldigen dus) van de twee getallen aan de linker kant.

Schematisch:



Nu andersom:

Je wilt een ontbinding vinden voor $x^2 + 7x + 12$
Op grond van het bovenstaande moet je twee getallen zoeken die opgeteld 7 zijn en vermenigvuldigd 12.
Mogelijke kandidaten (alle mogelijke tweetallen met als product 12):

Product
$1 \cdot 12$
$2 \cdot 6$
$3 \cdot 4$
$-1 \cdot -12$
$-2 \cdot -6$
$-3 \cdot -4$

Theorie Wiskunde Ontbinden in factoren

Als je nu ook nog naar de som kijkt, krijg je volgende tabel:

Product	Som
1 · 12	13
2 · 6	8
3 · 4	7
-1 · -12	-13
-2 · -6	-8
-3 · -4	-7

Ik zocht twee getallen met product 12 en som 7, dus 3 en 4.
Je kunt $x^2 + 7x + 12$ dus ontbinden als $(x + 3)(x + 4)$

Vaak is het niet nodig (of zelfs verstandig) om zo'n tabel te maken. Als je goed kijkt (en nadenkt) kun je het soms zo zien.

Voorbeeld
$x^2 - 4x = 21$
$x^2 - 4x - 21 = 0$
$(x - 7)(x + 3)=0$
$x - 7 = 0$ of $x + 3 = 0$
$x = 7$ of $x = -3$

Andere voorbeelden

Voorbeeld 1:

Los de volgende vergelijking op: $x^2 - 7x + 10 = 0$

Oplossing:

$x^2 - 7x + 10 = 0$	Zorg dat het rechterlid 0 is. (dit is, in dit geval, al zo.)
$(x-2)(x-5) = 0$	Als het kan: ontbind in factoren.
$x - 2 = 0 \vee x - 5 = 0$	Pas toe: AB = 0; A = 0 of B = 0 v betekend hier: 'of'
$x = 2 \vee x = 5$	Los op: Wat is x?

Voorbeeld 2:

Los de volgende vergelijking op: $x^2 - 8x - 20 = 0$

Oplossing:

Theorie Wiskunde Ontbinden in factoren

$x^2 - 8x - 20 = 0$	Zorg dat het rechterlid 0 is. (dit is, in dit geval, al zo.)
$(x-10)(x+2) = 0$	Als het kan: ontbind in factoren.
$x - 10 = 0 \vee x + 2 = 0$	Pas toe: AB = 0; A = 0 of B = 0
$x = 10 \vee x = -2$	Los op:

In de voorbeelden hierboven konden we steeds gebruik maken van 'ontbinden in factoren'. Het kan ook voorkomen dat je de oplossingen niet meteen ziet. In dit geval kan je de abc-formule gebruiken.

Voorbeeld 3:

Los de volgende vergelijking op: $x^2 - 3x - 3 = 0$
Oplossingen in 2 decimalen nauwkeurig:

Oplossing:

$$x^2 - 3x - 3 = 0$$

$$abc - formule:$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times -3}}{2 \times 1} =$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2} =$$

$$x_1 = -0,79 \vee x_2 = 3,79$$

Pittiger werk

Voorbeeld
$2x^4 - 8x^3 = 42x^2$
$x^4 - 4x^3 = 21x^2$
$x^4 - 4x^3 - 21x^2 = 0$
$x^2 \cdot (x^2 - 4x - 21) = 0$
$x^2 = 0$ of $x^2 - 4x - 21 = 0$
$x = 0$ of $(x - 7)(x + 3)=0$
$x = 0$ of $x - 7 = 0$ of $x + 3 = 0$
$x = 0$ of $x = 7$ of $x = -3$

Voorbeeld
$x^3 = x^2 + 12x$
$x^3 - x^2 - 12x = 0$
$x(x^2 - x - 12) = 0$
$x = 0$ of $x^2 - x - 12 = 0$
$x = 0$ of $(x - 4)(x + 3) = 0$
$x = 0$ of $x = 4$ of $x = - 3$

Theorie Wiskunde Ontbinden in factoren

Voorbeeld
$x^4 - 8 \cdot x^2 - 9 = 0$
neem $y = x^2$
$y^2 - 8y - 9 = 0$
$(y - 9)(y + 1)$
$y = 9$ of $y = -1$
$x^2 = 9$ of $x^2 = -1$
$x^2 = 9$
$x = -3$ of $x = 3$

Voorbeeld
$x^6 - 16x^3 + 64 = 0$
neem $y = x^3$
$y^2 - 16y + 64 = 0$
$(y - 8)(y - 8) = 0$ of $(y - 8)^2 = 0$
$y = 8$
$x^3 = 8$
$x = 2$

Voorbeeld
$x - 13\sqrt{x} + 36 = 0$
neem $y = \sqrt{x}$
$y^2 - 13y + 36 = 0$
$(y - 9)(y - 4) = 0$
$y = 9$ of $y = 4$
$\sqrt{x} = 9$ of $\sqrt{x} = 4$
$x = 81$ of $x = 16$

Voorbeeld
$(x - 4)^2 - 5(x - 4) + 6 = 0$
neem $y = x-4$
$y^2 - 5y + 6 = 0$
$y = 3$ of $y = 2$
$x - 4 = 3$ of $x - 4 = 2$
$x = 7$ of $x = 6$

Voorbeeld
$2x^2 - (x - 2)^2 = 1$
$2x^2 - \{x^2 - 4x + 4\} = 1$
$2x^2 - x^2 + 4x - 4 = 1$
$x^2 + 4x - 5 = 0$
$(x + 5)(x - 1) = 0$
$x = -5$ of $x = 1$