# Theorie Kwadratische functies

Internetbron: wiskunde.hacom.nl
www.nl.wikipedia.org/wiki

## Kwadratische functies [tweedegraadsfuncties]:

---

## Tekenen van een grafiek bij een kwadratische formule:

De grafiek bij een kwadratische formule is altijd een parabool. Hierbij is het volgende belangrijk te weten:

**Definitie**

Een kwadratische functie f heeft als vorm: $f(x) = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$

a > 0 : de grafiek van *f* is een dalparabool
a < 0 : de grafiek van *f* is een bergparabool

Wanneer je bij een kwadratische formule een grafiek gaat tekenen, kan je het beste eerst een tabel maken.
Vervolgens kan je de punten tekenen, die bij je tabel horen.

**Voorbeeld 1:**

Voorbeeld 2:

Gegeven is de functie: $y = x^2 + 1$

Zoals je misschien opvalt staat er in deze formule geen term ax.
Wanneer dit het geval is, mag je altijd een tabel maken met x = -3 t/m 3.

**Tabel:**

| X | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | | | | | | | |

Nadat we de tabel hebben gemaakt kunnen we deze gaan invullen. We moeten bij iedere x een getal krijgen.
Dit doen we door steeds een waarde van x in de formule in te vullen.

Gegeven is de functie: $y = x^2 + 1$

Neem als eerste: $x = -3$

$$x = -3 \Rightarrow y = (-3)^2 + 1 = 10$$

Vervolgens gaan we de tabel verder invullen. De andere getallen reken je op dezelfde manier uit als hierboven.

# Theorie Kwadratische functies

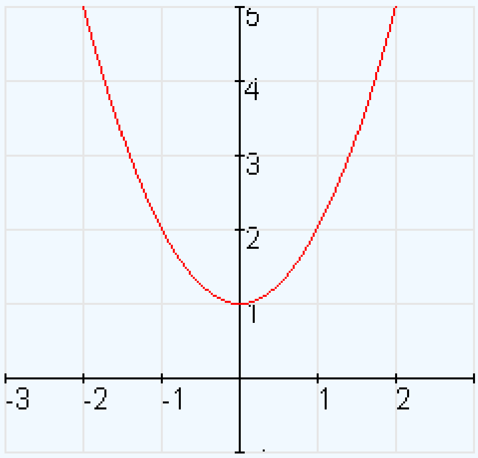
$$x = -2 \Rightarrow y = (-2)^2 + 1 = 5$$
$$x = -1 \Rightarrow y = (-1)^2 + 1 = 2$$
$$x = 0 \Rightarrow y = 0^2 + 1 = 1$$
$$x = 1 \Rightarrow y = 1^2 + 1 = 2$$
$$x = 2 \Rightarrow y = 2^2 + 1 = 5$$
$$x = 3 \Rightarrow y = 3^2 + 1 = 10$$

Invullen in de tabel levert op:

| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 10 | 5 | 2 | 1 | 2 | 5 | 10 |

Wanneer we de tabel afhebben kunnen we alle punten in een assenstelsel tekenen. We weten dat het een parabool moet worden.
De vraag is: Is het een berg- of een dalparabool. Voor $x^2$ staat niets, dit betekend dat het positief is. Het is dus een dalparabool.

Let op: Bij het tekenen van een parabool moet je zorgen dat je grafiek een vloeiende lijn is. Er mogen dus geen knikken inzitten




Grafiek bij:
$y = x^2 + 1$

Gegeven is de functie: $f(x) = x^2 - 4x + 5$

De eerste vraag die meteen opkomt is: Welke waarden moet ik in mijn tabel zetten?

In de onderbouw, van het voortgezet onderwijs, wordt de tabel altijd gegeven. In de tweede fase kan je gebruik maken van je grafische rekenmachine.

In dit voorbeeld moeten we een tabel maken voor x = 0 t/m x = 6.

# Theorie Kwadratische functies

**Tabel:**

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | | | | | | | |

Nadat we de tabel hebben gemaakt kunnen we deze gaan invullen. We moeten bij iedere x een getal krijgen.
Dit doen we door steeds een waarde van x in de formule in te vullen.

Gegeven is de functie: $f(x) = x^2 - 4x + 5$

Neem als eerste: $x = 0$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0^2 - 4 \times 0 + 5 = 5$$

Vervolgens gaan we de tabel verder invullen. De andere getallen reken je op dezelfde manier uit als hierboven.

$$x = 1 \Rightarrow y = 1^2 - 4 \times 1 + 5 = 2$$
$$x = 2 \Rightarrow y = 2^2 - 4 \times 2 + 5 = 1$$
$$x = 3 \Rightarrow y = 3^2 - 4 \times 3 + 5 = 2$$
$$x = 4 \Rightarrow y = 4^2 - 4 \times 4 + 5 = 5$$
$$x = 5 \Rightarrow y = 5^2 - 4 \times 5 + 5 = 10$$
$$x = 6 \Rightarrow y = 6^2 - 4 \times 6 + 5 = 17$$

Invullen in de tabel levert op:

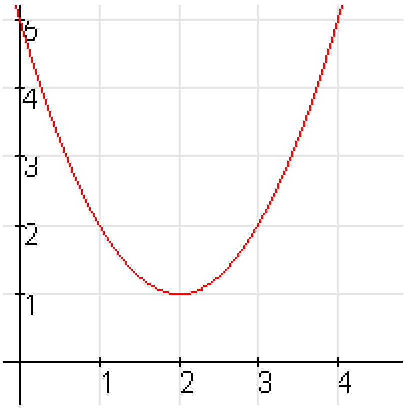
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 5 | 2 | 1 | 2 | 5 | 10 | 17 |

Wanneer we de tabel afhebben kunnen we alle punten in een assenstelsel tekenen. We weten dat het een parabool moet worden.
Verder valt het op dat de laatste twee uitkomsten heel hoog zijn, in vergelijking met de eerste vier uitkomsten. Je mag alle uitkomsten tekenen maar onthoud dat je uitschieters ook weg mag laten. Verder moet je onthouden dat je assen niet langer dan 15 cm tekent. In dit geval tekenen we de uitkomsten 10 (5,10) en 17 (6,17) niet.

Let op: Bij het tekenen van een parabool moet je zorgen dat je grafiek een vloeiende lijn is. Er mogen dus geen knikken inzitten

Grafiek bij:
$f(x) = x^2 - 4x + 5$

# Theorie Kwadratische functies




### Snijpunten van grafieken met de x- en y-as berekenen:

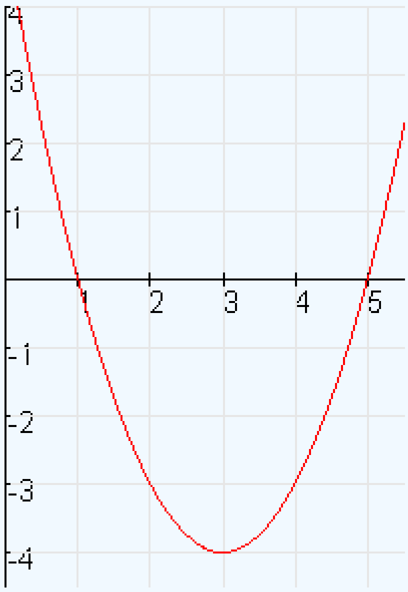
**Opmerking:**

| | |
|---|---|
| Snijpunten met de **x-as:** | Het *y*-coördinaat is 0, *y* = 0<br>Het *x*-coördinaat volgt uit: *f(x)=0* |
| Snijpunten met de **y-as:** | Het *x*-coördinaat is 0, *x*= 0<br>Het *y*-coördinaat volgt uit: *f(0)* |

**Voorbeeld:**

Gegeven is de functie: $y = x^2 - 6x + 5$

Bij deze formule hoort de volgende grafiek:



# Theorie Kwadratische functies

We vragen ons af in welke punten de grafiek van *f* de *x*-as snijdt.
- In de grafiek kan je meteen die twee punten aflezen, namelijk: (1,0) en (5,0).

Maar als we nu geen grafiek willen tekenen of we moeten het uitrekenen:

Wanneer de grafiek de x-as snijdt dan geldt: $y=0$, $f(x) = 0$.
We moeten dus de functie gelijk stellen aan 0.

$$f(0) = 0$$
$$x^2 - 6x + 5 = 0$$
$$(x-1)(x-5) = 0$$
$$(x-1) = 0 \vee (x-5) = 0$$
$$x = 1 \vee x = 5$$

De Grafiek snijdt de x-as dus in de punten: (1,0) en (5,0).

## ABC formule

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

waarin a,b,c afkomstig zijn van $y=ax^2+bx+c$

## ABC formule

Voor een **tweedegraads vergelijking** van de vorm:

$ax^2 + bx + c = 0$

kun je een **formule** afleiden waarmee je de oplossingen van zo'n vergelijking kunt uitrekenen :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Het ± teken betekent hier **niet** ongeveer, maar plus of min. Je krijgt op deze manier dus 2 antwoorden één met **plus** en één met **min**.
In de formule speelt D = $\mathbf{b^2 - 4ac}$ een belangrijke rol.
We noemen D de **discriminant**. In het algemeen is het handig om eerst de dicriminant uit te rekenen en daarna pas de rest.

Je kunt 3 gevallen onderscheiden:

# Theorie Kwadratische functies

1. D > 0: er zijn 2 oplossingen.
2. D = 0: er is precies 1 oplossing.
3. D < 0: er zijn geen (reële) oplossingen.

**Voorbeeld 1:**

Los de volgende vergelijking op : $3x^2 - 7x + 2 = 0$

Oplossing:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a = 3;\ b = -7;\ c = 2$

invullen:

$$x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 3 \times 2}}{2 \times 3} =$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{6} =$$

$$x_1 = \frac{7 - \sqrt{25}}{6} \vee x_2 = \frac{7 + \sqrt{25}}{6}$$

$$x_1 = \frac{2}{6} = 0,33 \vee x_2 = \frac{12}{6} = 2$$

**Voorbeeld 2:**

Los de volgende vergelijking op : $5x^2 - x - 4 = 0$

Oplossing:

# Theorie Kwadratische functies

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a = 5;\ b = -1;\ c = -4$

invullen:

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 5 \times -4}}{2 \times 5} =$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{10} =$$

$$x_1 = \frac{1-9}{10} = -0{,}8 \ \vee \ x_2 = \frac{1+9}{10} = 1$$

## Sommen met de abc-formule

Los onderstaande vergelijkingen op:
1) $x^2 - 2x - 2 = 0$
2) $2x^2 + 2x - 5 = 0$
3) $\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3 = 0$
4) $-x^2 + x + 3 = 0$

De uitwerkingen vind je hier.

# Theorie Kwadratische functies

## Uitwerkingen abc-formule

**1)** $x^2 - 2x - 2 = 0$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.-2}}{2.1}$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{12}}{2}$

$(\sqrt{12} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3})$

$x = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$

$x = 1 + \sqrt{3} \lor x = 1 - \sqrt{3}$

**2)** $2x^2 + 2x - 5 = 0$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4.2.-5}}{2.2}$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{44}}{4}$

$(\sqrt{44} = \sqrt{4} \times \sqrt{11} = 2\sqrt{11})$

$x = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{11}}{4}$

$x = -½ - ½\sqrt{11} \lor x = -½ + ½\sqrt{11}$

**3)** $½x^2 + 2x - 3 = 0$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4.½.-3}}{2.½}$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{10}}{1}$

$x = -2 - \sqrt{10} \lor x = -2 + \sqrt{10}$

**4)** $-x^2 + x + 3 = 0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.-1.3}}{2.-1}$

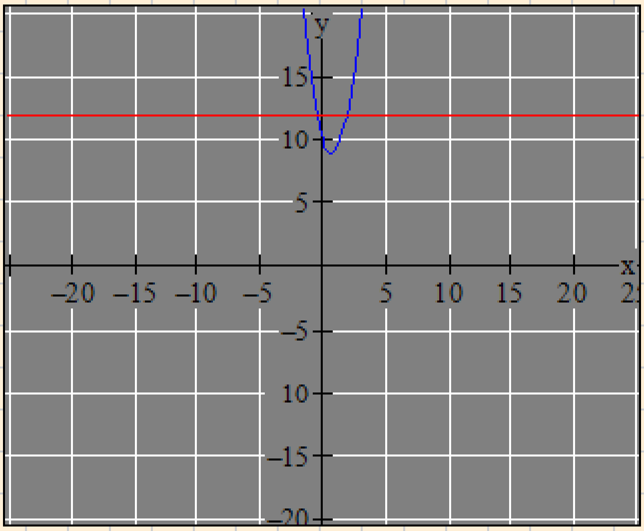
$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{-2}$

$x = \dfrac{-1 - \sqrt{13}}{-2} \lor x = \dfrac{-1 + \sqrt{13}}{-2}$

Een voorbeeld om het duidelijk te maken: Los op: $2x^2 - 3x + 10 = 12$

Grafisch ziet dat er zo uit:

# Theorie Kwadratische functies




Opl:
***STAP 1***: eerst op 0 herleiden:
$2x^2 - 3x + 10 - 12 = 0$
$2x^2 - 3x - 2 = 0$

***STAP 2***: bepaal hoe groot a, b en c zijn:
a=2, b=-3, c=-2

***STAP 3***: formule invullen en uitrekenen:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.2.-2}}{2.2}$$

Dus: $x = \frac{3 \pm 5}{4}$

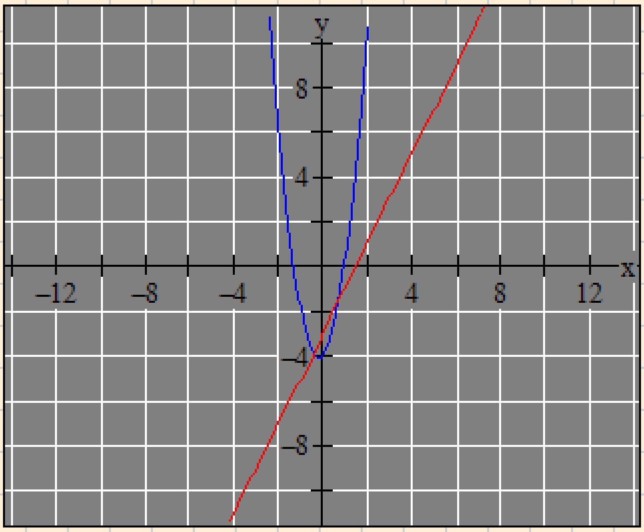
Dus: $x = \frac{3 + 5}{4}$ of $x = \frac{3 - 5}{4}$

De oplossingen zijn x = 2 of x = -½
De snijpunten zijn hier erg makkelijk want overal geldt: y = 12
Dus snijpunten (2,12) en (-½,12)

# Theorie Kwadratische functies

Voor welke x geldt: $3x^2 + x - 4 = 2x - 3$

Grafisch ziet dat er zo uit:




***STAP 1***: Op nul herleiden:
$3x^2 + x - 2x - 4 + 3 = 0$
$3x^2 - x - 1 = 0$

***STAP 2***: a, b en c bepalen:
$a = 3, b = -1, c = -1$

***STAP 3***: invullen en uitrekenen:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.3.-1}}{2.3}$$

Dus: $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$

De oplossingen:

$$x = \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \vee x = \frac{1 - \sqrt{13}}{6}$$