Dictaat Rekenvaardigheden

Faculteit Wiskunde en Informatica

7 mei 2007

Voorwoord

In het middelbaar onderwijs hebben zich de laatste jaren grote veranderingen voltrokken: de tweede fase met de daaraan verbonden profielkeuze en het studiehuis zijn ingevoerd. In sommige opzichten is daardoor de aansluiting tussen vwo en universiteit verbeterd. Echter, niet voor alle studies is dit het geval. Bij de technische studies is gebleken dat een deel van de instromende studenten deficiï¿½ties heeft. Dit geldt zowel voor studenten met het profiel "Natuur en Techniek" als voor studenten met het profiel "Natuur en Gezondheid". Eï¿½ van de deficiï¿½ties betreft de algebraï¿½che vaardigheden oftewel het manipuleren met formules. Het efficiï¿½t omgaan met ï¿½ het inzicht krijgen in formules wordt op het vwo nauwelijks meer geoefend. Dit hangt samen met het aantal beschikbare uren en met het invoeren van de formulekaart en de grafische rekenmachine. Doordat veel aankomende studenten deze vaardigheden ontberen, besteden zij in het eerste jaar op de universiteit vaak veel te veel tijd aan het maken van vraagstukken of blijven daar zelfs in steken. Het is veel beter om je op de essentie van een vraagstuk te concentreren dan om teveel tijd aan rekenwerk te besteden. Voor de eerstejaars met genoemde deficiï¿½ties is deze syllabus Rekenvaardigheden gemaakt.

Deze syllabus is bedoeld voor het aanleren van de algebraï¿½che vaardigheden die benodigd zijn voor een technische studie op universitair niveau. Aan de opgaven uit de eerste 10 paragrafen kan men zien wat men aan rekenvaardigheden van eerstejaars verwacht. De paragrafen 11 t/m 14 bevatten opgaven over onderwerpen die niet tot de standaard VWO-stof behoren, maar bijzonder nuttig zijn voor een technische studie. De wiskundestof wordt steeds kort herhaald, waarna er een groot aantal opgaven volgt. Door het (met de hand!) maken hiervan maakt de student zich de stof eigen en verkrijgt hij/zij inzicht in formules en rekenregels.

Gebrek aan rekenvaardigheden en formulekennis los je niet binnen een paar maanden op. Extra training in het eerste tri- of semester zal waarschijnlijk niet genoeg zijn. In dat geval moet je zelf aandacht blijven besteden aan rekenvaardigheden en formulekennis. Deze syllabus is geschikt voor zelfwerkzaamheid: de antwoorden op de opgaven staan achterin.

Hoofdstuk 1

Factoren en veeltermen

We onderscheiden factoren en termen. Een factor is een onderdeel van een vermenigvuldiging; een term is een onderdeel van een som (of verschil). Bijvoorbeeld, $3a$ is een eenterm die bestaat uit de factoren 3 en a; $3 - a$ is een tweeterm die bestaat uit de termen 3 en $-a$.

Voorbeelden:

- $2a^2b - 3c$ bestaat uit twee termen, namelijk $2a^2b$ en $-3c$.
- $2a^2b$ bestaat uit drie factoren: 2, a^2 en b.
- $-2c$ bestaat uit twee factoren: -2 en c.
- $2a(3b - 2cd)$ bestaat uit drie factoren: 2, a en $(3b - 2cd)$.
- $3b - 2cd$ is een tweeterm waarvan de eerste term bestaat uit de factoren 3 en b; de tweede term uit -2, c en d.

Waarschuwing:

Bij de vraag: "Ontbind $3a - 6ab$ in factoren"zou je kunnen antwoorden:

$$3a - 6ab = 3(a - 2ab).$$

Echter, met ontbind in factoren wordt altijd bedoeld “Ontbind in zoveel mogelijk factoren”. Daarom:

$$3a - 6ab = 3a(1 - 2b).$$

Hoofdstuk 2

Machten

De volgende regels gelden onder de voorwaarden $a > 0$ en $b > 0$:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}, \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \quad (a^p)^q = a^{pq}$$

$$(ab)^p = a^p b^p, \quad \sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{2}}, \quad \sqrt[p]{a^q} = a^{\frac{q}{p}}$$

Een voorbeeld waarbij van het bovenstaande gebruik wordt gemaakt:

$$\frac{(3a^2b)^{\frac{1}{3}}}{2a^4b^{-\frac{1}{2}}} = \frac{3^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{2a^4b^{-\frac{1}{2}}} = \frac{3^{\frac{1}{3}}}{2}a^{-\frac{10}{3}}b^{\frac{5}{6}}$$

De uitdrukking is teruggebracht tot een product van getallen en machten van de vorm

$$C \cdot a^n b^m c^o \cdots$$

2.1 Opgaven

Herleid onderstaande uitdrukkingen tot een vorm $\boldsymbol{C} \cdot a^n b^m c^o \ldots$.

Alle variabelen zijn positieve getallen.

Serie A

1. $(p^4q^2)^3 \cdot (p^2q^5)^2 =$
2. $\dfrac{(-a^5b^2)^4}{(a^3b)^3} =$
3. $\dfrac{(-2cd^4)^3}{2(3c^2d)^2} =$
4. $(-3a\sqrt{b})^3 =$
5. $\sqrt{2ab^2} \cdot 2\sqrt{a} =$
6. $\dfrac{2p\sqrt[3]{q^2}}{\sqrt[4]{p^3q}} =$
7. $(a^2b^{-3})^2 \cdot -3a^{-7}b^{-2} =$
8. $(3a^2b)^{-\frac{1}{4}} \cdot (6a^3b^2)^{\frac{1}{2}} =$
9. $\dfrac{3a^{-\frac{2}{3}}b^2}{2a^2b^{-\frac{1}{3}}} =$
10. $\dfrac{(2a)^{-\frac{1}{4}}}{2a^{-\frac{1}{2}}} =$

Serie B

1. $(p^3q^4)^2 \cdot (p^3q^2)^4 =$
2. $\dfrac{(-a^3b^2)^4}{(-a^4b)^3} =$
3. $\dfrac{(-2c^2d^4)^4}{-2(3c^2d)^3} =$
4. $(-2ab\sqrt{b})^5 =$
5. $\sqrt{2ab^3} \cdot 3\sqrt{\frac{a}{b}} =$
6. $\dfrac{2p\sqrt[3]{q^4}}{\sqrt{p^3q}} =$
7. $(a^{-2}b^3)^2 \cdot -3a^3b^{-2} =$
8. $(3a^2b)^{-\frac{1}{3}} \cdot (6a^3b^2)^{\frac{1}{4}} =$
9. $\dfrac{3a^{-\frac{2}{5}}b^2}{2a^3b^{-\frac{1}{2}}} =$
10. $\dfrac{(2a)^{-\frac{1}{3}}}{2a^{-\frac{1}{2}}} =$

Hoofdstuk 3

Herleiden

Er geldt:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Speciale gevallen van deze regel zijn de zogenaamde 'merkwaardige producten':

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \text{ en} \\ (a - b)(a + b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Voorbeeld:

- $(3a - 2\sqrt{b})^2 = 9a^2 - 12a\sqrt{b} + 4b$

Verder moeten we ook wortels kunnen herleiden.
Voorbeelden:

- $\sqrt{72} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$,
- $\dfrac{3}{\sqrt{7}} = \dfrac{3\sqrt{7}}{7} = \dfrac{3}{7}\sqrt{7}$

3.1 Opgaven

Herleid onderstaande uitdrukkingen met behulp van bovenstaande regels. Zorg ervoor dat er geen wortels in de noemer blijven staan. Herleid wortels zoveel mogelijk.

Serie A

1. $(3a-b)^2 =$
2. $(-2a^2+3a)^2 =$
3. $(3\sqrt{6}-6\sqrt{3})^2 =$
4. $(m-2n)(3m+n) =$
5. $(6-2\sqrt{3})(\sqrt{3}+2) =$
6. $(-3a^2b^3+\frac{1}{3}a^4b)^2 =$
7. $(-2a\sqrt{3}+\sqrt{21})(2a\sqrt{3}+\sqrt{21}) =$
8. $(2a-b+1)(3a+2b-5) =$
9. $(\frac{2}{\sqrt{20}}+\frac{3}{\sqrt{5}})^2 =$
10. $(3a-1)(3a+1)(9a^2+1) =$

Serie B

1. $(-3a+2b)^2 =$
2. $(2a^3-3a)^2 =$
3. $(3\sqrt{15}-2\sqrt{3})^2 =$
4. $(2m-3n)(3m+2n) =$
5. $(1-2\sqrt{5})(\sqrt{5}+2) =$
6. $(-2a^4b^3+\frac{1}{4}a^2b)^2 =$
7. $(-2a\sqrt{3}+\sqrt{30})(2a\sqrt{3}+\sqrt{30}) =$
8. $(2a-3b+1)(3a+2b-4) =$
9. $(\frac{2}{\sqrt{20}}+\frac{3}{\sqrt{45}})^2 =$
10. $(2a-1)(2a+1)(4a^2+1) =$

Voorbeelden:

- $x^3 - 3x^2 - 28x = x(x^2 - 3x - 28) = x(x+4)(x-7)$.
- $x^4 - 16 = (x^2+4)(x^2-4) = (x^2+4)(x+2)(x-2)$.

In deze voorbeelden treden steeds gehele getallen op. Echter, wees erop bedacht dat dit lang niet altijd het geval is. Bijvoorbeeld:

$$(2x^2 - 1) = (\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1).$$

3.2 Opgaven

Ontbind in zoveel mogelijk factoren, uitgedrukt met gehele getallen.

Serie A.

1. $16x^4 - 81 =$
2. $3x^5 - 12x^4 - 63x^3 =$
3. $x^{16} - 1 =$
4. $x^4 + x^2 - 6 =$
5. $x^2 - 19x + 34 =$
6. $x^2 - 15x - 34 =$
7. $x(x-1) - (x-1) =$
8. $x(x^2-1) + (x-1) =$
9. $(3x-2)^2 - (2x+3)^2 =$
10. $x^6 - 6x^3 + 9 =$

Serie B.

1. $81x^4 - 16 =$
2. $3x^4 - 15x^3 + 12x^2 =$
3. $x^{12} - 16 =$
4. $x^4 - x^2 - 20 =$
5. $x^2 - 21x + 38 =$
6. $x^2 - 17x - 38 =$
7. $2x(x+1) + 2(x+1) =$
8. $x(x^2-1) - (x-1) =$
9. $(5x-3)^2 - (3x+5)^2 =$
10. $x^{10} + 8x^5 + 16 =$

De sommen die nu volgen hebben ook betrekking op 'ontbinden in factoren'.
Voorbeelden:

- $6x^3 - 18x^2 - x + 3 = 6x^2(x-3) - (x-3) = (6x^2-1)(x-3)$
- $2x^2 + x - 10 = 2x^2 - 4x + 5x - 10 = 2x(x-2) + 5(x-2) = (2x+5)(x-2)$

3.3 Opgaven

Ontbind in zoveel mogelijk factoren, uitgedrukt met gehele getallen.

Serie A.

1. $3x^2 - 20x + 12 =$
2. $2x^2 + 7x + 6 =$
3. $3x^4 - 11x^2 + 6 =$
4. $-2x^2 + 7x + 15 =$
5. $2x^4 - x^2 - 3 =$
6. $x^3 - 4x^2 - x + 4 =$
7. $2x^3 - 6x^2 + x - 3 =$
8. $x^3 + 5x^2 - 4x - 20 =$
9. $-3x^3 + 6x^2 + 2x - 4 =$
10. $x^7 + 2x^4 - 15x =$

Serie B

1. $3x^2 - 14x + 15 =$
2. $2x^2 + 9x + 9 =$
3. $3x^4 - 13x^2 + 12 =$
4. $-2x^2 + x + 21 =$
5. $2x^4 + 2x^2 - 4 =$
6. $x^3 - 8x^2 - x + 8 =$
7. $3x^3 - 12x^2 + 2x - 8 =$
8. $3x^3 + 15x^2 - 4x - 20 =$
9. $-2x^3 + 4x^2 + 3x - 6 =$
10. $x^8 - 4x^5 - 12x^2 =$

Hoofdstuk 4

Rationale breuken

Bij de volgende serie opgaven dien je de uitkomst te schrijven als één breuk. We noemen deze bewerking onder 'één noemer brengen'.

Voorbeeld:

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{2x-3}=\frac{2x-3}{(x-1)(2x-3)}-\frac{2(x-1)}{(x-1)(2x-3)}=\frac{2x-3-2(x-1)}{(x-1)(2x-3)}=-\frac{1}{(x-1)(2x-3)}$$

4.1 Opgaven

Serie A.

1. $\dfrac{3}{2x-1}+\dfrac{x}{x+1}=$
2. $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=$
3. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{x+3}=$
4. $\dfrac{-3}{1-x}-\dfrac{6x}{x+3}=$
5. $\dfrac{13}{2x+3}-\dfrac{5}{x+1}=$
6. $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{3}{2x-4}=$
7. $-\dfrac{x}{x^2-3}+\dfrac{2}{2x+1}=$
8. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2x}{(x+1)^3}$
9. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x+1}=$
10. $1-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{3}{x+3}=$

Serie B.

1. $\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{2x}{x+1}=$
2. $\dfrac{1}{\sqrt{2x}-3}+\dfrac{1}{\sqrt{2x}+3}=$
3. $\dfrac{x}{x^2-3}+\dfrac{2}{2x+3}=$
4. $\dfrac{-3}{1-x}+\dfrac{6x}{x+2}=$
5. $\dfrac{7}{2x+3}-\dfrac{5}{x^2+1}=$
6. $\dfrac{x}{x+3}-\dfrac{3}{2x+6}=$
7. $-\dfrac{x}{x-3}+\dfrac{2x}{2x+1}=$
8. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2x}{(x-1)^3}$
9. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x^2-1)}+\dfrac{1}{x+1}=$
10. $1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x-3}=$

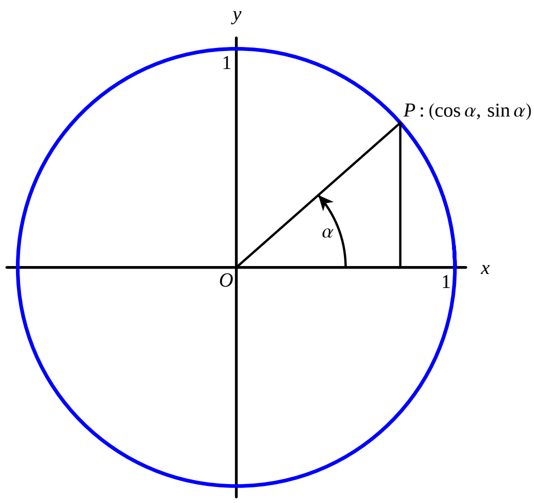
Hoofdstuk 5

Goniometrie

In eerste instantie voert men gewoonlijk de sinus, cosinus als verhoudingen van zijden in een rechthoekige driehoek. Dit betekent dat de hoek tussen de 0° en 90° ligt. Vervolgens voert men de tangens in als tangens(x) = sinus(x) / cosinus(x). Een natuurlijke uitbreiding voor willekeurige hoeken krijgen we met behulp van de eenheidscirkel.

We definiï¿½en:

> Een punt P op de eenheidscirkel heeft x-coördinaat $\cos(\alpha)$ en y-coördinaat $\sin(\alpha)$, dus $P = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, of in iets andere notatie $P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.



Er blijft dan gelden:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{en} \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

De hoek α wordt meestal uitgedrukt in radialen. Bij een hoek van ï¿½n radiaal hoort een cirkelboog met een lengte die gelijk is aan de straal van de cirkel. Dat is elegant, omdat daarmee de lengte van een cirkelboog gelijk is aan het product van straal en hoek (in radialen).

Daaruit volgt bijvoorbeeld dat 2π rad overeenkomt met $360°$. In deze cursus worden hoeken altijd in radialen uitgedrukt.

Het verdient aanbeveling onderstaande tabel van buiten te kennen.

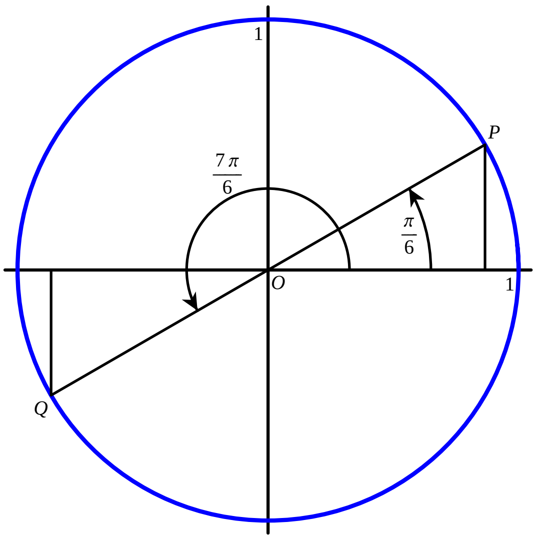
x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.g.

Voor $x = \frac{1}{2}\pi$ is $\tan x$ niet gedefinieerd (n.g.).

Bij hoeken groter dan $\frac{1}{2}\pi$ rad horen goniometrische verhoudingen die rechtstreeks af te leiden zijn uit de definities.

Voorbeeld:

- De coördinaten van Q welke horen bij een hoek van $\frac{7}{6}\pi$ rad kun je afleiden uit de coördinaten van P die horen bij een hoek van $\frac{1}{6}\pi$ rad.



Daarom

$$\begin{aligned}
\sin\frac{7}{6}\pi &= -\sin\frac{1}{6}\pi &&= -\frac{1}{2}\\
\cos\frac{7}{6}\pi &= -\cos\frac{1}{6}\pi &&= -\frac{1}{2}\sqrt{3}\\
\tan\frac{7}{6}\pi &= \frac{\sin\frac{7}{6}\pi}{\cos\frac{7}{6}\pi} &&= \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

We noemen dit 'herleiden naar een hoek in het eerste kwadrant'.

5.1 Opgaven

Herleid tot hoeken in het eerste kwadrant. Je kunt daarbij bovenstaande tabel gebruiken.

Serie A

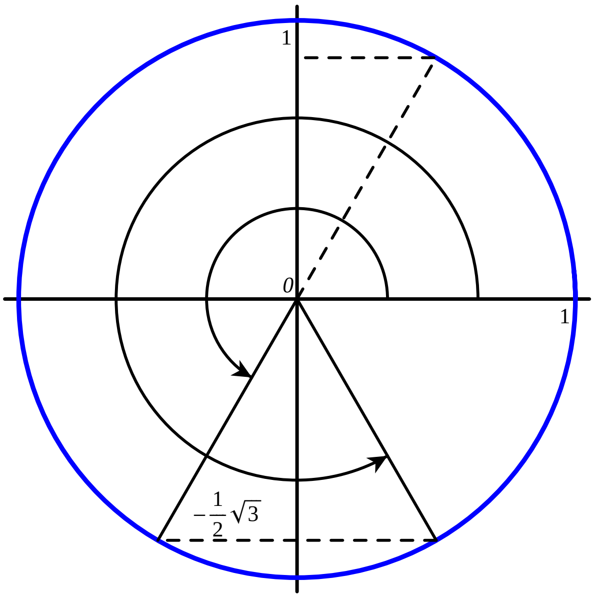
1. $\sin(\frac{4}{3}\pi) =$
2. $\tan(-\frac{1}{4}\pi) =$
3. $\cos(\frac{5}{6}\pi) =$
4. $\sin(\frac{2}{3}\pi) =$
5. $\tan(\frac{85}{4}\pi) =$
6. $\sin(\frac{3}{2}\pi) =$
7. $\cos(-\frac{7}{4}\pi) =$
8. $\tan(\frac{5}{6}\pi) =$
9. $\cos(\frac{2}{3}\pi) =$
10. $\sin(\frac{37}{4}\pi) =$

Serie B

1. $\cos(\frac{4}{3}\pi) =$
2. $\sin(-\frac{1}{4}\pi) =$
3. $\tan(\frac{5}{6}\pi) =$
4. $\cos(\frac{2}{3}\pi) =$
5. $\sin(-\frac{85}{4}\pi) =$
6. $\tan(\frac{3}{2}\pi) =$
7. $\sin(-\frac{7}{4}\pi) =$
8. $\cos(-\frac{5}{6}\pi) =$
9. $\tan(\frac{2}{3}\pi) =$
10. $\sin(\frac{34}{3}\pi) =$

Een ander type vraag gaat als volgt:

Gegeven: $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Hoe groot is x, indien we de afspraak maken dat $0 \leq x < 2\pi$?



Gebruik de eenheidscirkel:

Per definitie is $\sin x$ de y-coördinaat van een punt op de eenheidscirkel. Omdat $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ negatief is, weten we dat de y-coördinaat negatief is, De y-coördinaat is negatief in het derde of vierde kwadrant, daar moeten we de hoek x dus zoeken.

Bekend is:

$$\sin \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Met behulp van de tekening en bovenstaande tabel is vlot in te zien dat bij $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ hoeken horen van

$$\pi + \frac{1}{3}\pi \text{ en } 2\pi - \frac{1}{3}\pi.$$

Het antwoord luidt dus: $x = \frac{4}{3}\pi \vee x = \frac{5}{3}\pi$.

Hoofdstuk 6

Goniometrische formules

Met behulp van de definitie via de eenheidscirkel zijn de volgende uitdrukkingen eenvoudig in te zien:

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \tan(-x) = -\tan x$$

en

$$\sin x = \cos(\frac{1}{2}\pi - x), \qquad \cos x = \sin(\frac{1}{2}\pi - x).$$

De volgende formules worden niet afgeleid of bewezen. Ze hangen sterk met elkaar samen. Bijvoorbeeld, indien je er één als uitgangspunt neemt, kun je met behulp van bovenstaande formules de andere uitdrukkingen afleiden:

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\
\tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \\
\tan(x-y) &= \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}
\end{aligned}$$

6.1 Opgaven

1. Leid uit de formule voor $\sin(x+y)$ de formules voor $\sin(x-y)$, $\cos(x+y)$ en $\cos(x-y)$ af.

2. Leid zelf af:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

en

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

3. Leid uit bovenstaande uitdrukkingen af:

   - $\sin 2x = 2\sin x \cos x$
   - $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
   - $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

4. Voor een hoek $x \in 0, \frac{1}{2}\pi$ geldt:

$$\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Bereken $\cos(x - \frac{1}{6}\pi)$.

5. Voor een hoek $x \in \frac{1}{2}\pi, \pi$ geldt:

$$\cos 2x = \frac{1}{3}.$$

Bereken $\sin x$.

6. Voor een hoek $x \in 0, \frac{1}{2}\pi$ geldt:

$$\cos x = \frac{3}{4}.$$

Bereken $\tan 2x$.

6.2 Opgaven

Bij de volgende opgaven dient gebruik te worden gemaakt van bovenstaande goniometrische formules:

Serie A

1. Ontbind in factoren: $\sin(x) + \sin(2x) =$
2. Ontbind in factoren:
$$\sin(x + y) + \sin(x - y) =$$
3. Ontbind in factoren: $\cos 2x + \sin^2 x =$
4. Ontbind in factoren: $1 + \sin 2x - \cos^2 x =$
5. Ontbind in factoren: $\cos 2x - 1 =$
6. Ontbind in factoren: $\sin^2 x - 5 \sin x + 4 =$
7. Ontbind in factoren: $\sin^2 x + 5 \cos x + 5 =$
8. Bereken exact een uitkomst voor $\cos \frac{1}{8}\pi$
9. Vereenvoudig $\dfrac{\cos^2 x}{1 - \sin x} - \dfrac{\cos^2 x}{1 + \sin x}$
10. $f(x) = 1 - \cos 2x - \sin^2 x$ is te schrijven als $f(x) = a + b\cos(cx)$.
Bepaal a, b en c.

Serie B

1. Ontbind in factoren: $2\sin^2 x - \sin 2x =$
2. Ontbind in factoren: $\cos 2x - \cos^2 x =$
3. Ontbind in factoren: $1 - \sin 2x - \sin^2 x =$
4. Ontbind in factoren: $\cos 2x + 7 =$
5. Ontbind in factoren: $\sin^2 x - \sin x - 6 =$
6. Ontbind in factoren: $\cos^2 x + 3 \sin x + 9 =$
7. Schrijf zonder wortel: $\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} =$
8. Bereken exact een uitkomst voor $\sin \frac{1}{8}\pi$
9. Vereenvoudig
$$\cos^4 x - 2\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$$
10. $f(x) = 3\cos^2 x - \sin^2 x$ is te schrijven als $f(x) = a + b\cos(cx)$.
Bepaal a, b en c.

6.3 Opgaven

Bij de volgende opgaven dient gebruik te worden gemaakt van bovenstaande goniometrische formules:

Serie A

1. Toon aan dat $\cos^2 \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x$
2. Toon aan dat $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$
3. Toon aan dat $\cos^4 x + \frac{1}{2}\sin^2 2x + \sin^4 x = 1$
4. Toon aan dat $\cos^2 x(1 + \tan^2 x) = 1$
5. Toon aan dat $\tan x = \dfrac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$
6. Toon aan dat
$$\frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y} = \frac{\sin(x + y)}{\sin(x - y)}$$
7. Toon aan dat
$$\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$$
8. Toon aan dat
$$\frac{\tan^2 x - 1}{\tan^2 x + 1} = \sin^2 x - \cos^2 x$$
9. Toon aan dat
$$\tan(\tfrac{1}{4}\pi + x) = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$$
10. Toon aan dat $2\cos^2 x - \cos 2x = 1$

Serie B

1. Toon aan dat $\sin^2 \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x$
2. Toon aan dat $\cos^4 x(1 - \tan^4 x) = \cos 2x$
3. Toon aan dat $4\sin^2 x - 4\sin^4 x = \sin^2 2x$
4. Toon aan dat
$$\cos^4 x(1 + \tan^4 x) = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$
5. Toon aan dat $\tan x = \dfrac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$
6. Toon aan dat
$$\frac{1 + \tan x \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{\cos(x - y)}{\cos(x + y)}$$
7. Toon aan dat $\sin 2x - \tan x = \tan x \cos 2x$
8. Toon aan dat
$$\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$$
9. Toon aan dat
$$\tan(\frac{1}{4}\pi + x) + \tan(\frac{1}{4}\pi - x) = \frac{2}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$
10. Toon aan dat
$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} + \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{2}{\cos 2x}$$

Hoofdstuk 7

Differentiëren

Bij het differentiëren maken we gebruik van een aantal basisregels:

$$y = ax^n \Rightarrow y' = nax^{n-1}$$

$$y(x) = u(x)v(x) \Rightarrow y' = u'v + v'u \quad \text{(productregel)}$$

en

$$y(x) = \frac{t(x)}{n(x)} \Rightarrow y' = \frac{nt' - tn'}{n^2} \quad \text{(quotiëntregel)}$$

7.1 Differentiëren van goniometrische functies:

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x, \quad \frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

7.2 Kettingregel

Als de functies $y(x)$ en $u(x)$ gegeven zijn dan geldt voor de samengestelde functie $y(u(x))$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Voorbeelden:

- Bereken de afgeleide van de functie $y = 6(3x^2 - 2)^2$.

  Definieer: $u = 3x^2 - 2$.

  We moeten nu eerst $y = 6u^2$ differentiëren naar u en het resultaat vermenigvuldigen met de afgeleide van $u = 3x^2 - 2$ naar x.

  Er geldt: $\frac{dy}{du} = 12u$ en $\frac{du}{dx} = 6x$. Dus

  $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 12u \cdot 6x = 12(3x^2 - 2) \cdot 6x$$

  Kortom: $y' = 72x(3x^2 - 2)$

- $y = 3(x^2 - 5)^5 \Rightarrow y' = 15(x^2 - x)^4(2x - 1)$.

Handig om van buiten te kennen

$$y = u^n \Rightarrow y' = nu^{n-1}u'$$
$$y = \frac{1}{u} \Rightarrow y' = -\frac{1}{u^2}u'$$
$$y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{u}}u'$$

Voorbeelden:

- $y = 4(3x^2 - 1)^2 \Rightarrow y' = 8(3x^2 - 1) \cdot 6x = 48x(3x^2 - 1)$
- $y = \sqrt{6x - 1} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{6x - 1}} \cdot 6 = \dfrac{3}{\sqrt{6x - 1}}$
- $y = \dfrac{3}{2x^3 - 1} \Rightarrow y' = -\dfrac{3}{(2x^3 - 1)^2} \cdot 6x^2 = -\dfrac{18x^2}{(2x^3 - 1)^2}$
- $y = \ln(1 - x) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1 - x} \cdot -1 = -\dfrac{1}{(1 - x)} = \dfrac{1}{x - 1}$
- $y = 3^{x^2-5} \Rightarrow y' = 3^{x^2-5} \cdot \ln 3 \cdot 2x = 2x \cdot \ln 3 \cdot 3^{x^2-5}$
- $y = (2\sin^2 x - 1)^3 \Rightarrow y' = 3(2\sin^2 x - 1)^2 \cdot 4\sin x \cdot \cos x = 12\sin x\cos x \cdot (2\sin^2 x - 1)^2$

7.3 Opgaven

Bereken de afgeleiden van:

Serie A

1. $y = -3(1-2x)^5$
2. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
3. $y = \dfrac{3}{5-x^2}$
4. $y = \dfrac{3}{(3x-1)^3}$
5. $y = 6 \cdot 3^{2x-1}$
6. $y = 2e^{x^2-1}$
7. $y = x\ln(3x+4)$
8. $y = \ln(\dfrac{x}{x+1})$
9. $y = x^3 \cdot 2^{2x}$
10. $y = 3x\sqrt{3x-1}$
11. $y = \dfrac{\ln x}{1-\ln x}$
12. $y = (x^2-3x) \cdot e^x$
13. $y = \tan^3 x$
14. $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$
15. $y = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x - 1}$

Serie B

1. $y = 2x\ln 3x$
2. $y = \dfrac{\ln x}{x}$
3. $y = \sqrt{\sin 2x}$
4. $y = \dfrac{1}{\sqrt{3x^2+1}}$
5. $y = \dfrac{x^2-7x-8}{x^2-1}$
6. $y = \sin^2(2x - \frac{1}{6}\pi)$
7. $y = \dfrac{\ln^2 x}{\sin x}$
8. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
9. $y = \ln(\sqrt{3x-1})$
10. $y = e^{2\sin^2 x - 1}$
11. $y = \dfrac{e^x+1}{e^x}$
12. $y = \ln^4 x$
13. $y = \sin^2 x \cdot \cos x$
14. $y = \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$
15. $y = \dfrac{\cos x}{\cos^2 x - 1}$

Hoofdstuk 8

Primitiveren

In de integraalrekening neemt primitiveren een essentiële plaats in. Het is de inverse bewerking van differentiëren.

Kennis van differentiëren is daarom vereist.

Basisformules (met c een onbepaalde integratieconstante):

$$\int ax^n dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c; \quad \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1} + c$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c; \quad \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c \text{ (want} \frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x})$$

$$\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + c; \quad \int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + c$$

Controleer altijd of je goed geprimitiveerd hebt door de uitkomst te differentiëren.

8.1 Opgaven

Primitiveer de volgende functies.

Serie A

1. $(2x-1)^3$
2. $(5-x)^2$
3. $\sqrt{3x-4}$
4. $\dfrac{1}{(2x+3)^4}$
5. $\sin 2(x-\frac{1}{6}\pi)$
6. $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$
7. $\dfrac{x^2+1}{x}$
8. $\sin x + e^{3x}$
9. $\tan^2 x$
10. $\dfrac{2}{3-2x}$

Serie B

1. $(3x+2)^3$
2. $(8-2x)^2$
3. $\sqrt{2x-3}$
4. $\dfrac{1}{(2x-1)^5}$
5. $\cos \frac{1}{2}(x-\frac{1}{3}\pi)$
6. $\dfrac{2}{\sqrt{x-5}}$
7. $\dfrac{x^3-1}{x}$
8. $\cos 2x + e^{2x}$
9. $\tan^2 x + 2$
10. $\dfrac{3}{2-3x}$

Hoofdstuk 9

Oefening grafieken tekenen

De bedoeling van deze oefening is dat je bij een aantal functies de grafiek schetst zonder gebruik te maken van elektronische hulpmiddelen.

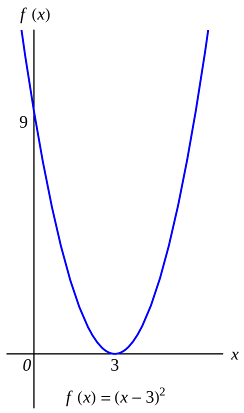
Afstanden tussen eenheden op de x-as hoeven niet noodzakelijk gelijk te zijn aan die tussen de eenheden op de y-as.

Kies het domein telkens zó dat de eigenschappen van de grafiek duidelijk te zien zijn, zoals snijpunten met de assen, asymptoten, perioden, enz.

Zet bij snijpunten en asymptoten ook getallen indien deze vlot uit het hoofd te berekenen zijn.

Voorbeeld:

- $f(x) = (x-3)^2$



We gebruiken hier de notatie $f(x)$ voor een functie van x.

9. Oefening grafieken tekenen

Serie A

1. $f(x) = (x+2)^4$
2. $f(x) = (x-2)^2 + 3$
3. $f(x) = -x^3 + 8$
4. $f(x) = x^2 + 6x + 9$
5. $f(x) = 6(x+1)^5$

Serie B

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{4}{x-2}$
3. $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x-3}$
4. $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$
5. $f(x) = \dfrac{4}{(2-x)^2}$

Serie C

1. $f(x) = 2^x$
2. $f(x) = (\frac{1}{2})^x + 3$
3. $f(x) = 2^{x-2} + 1$
4. $f(x) = 3^{-x} - 1$
5. $f(x) = e^{x-1}$

Serie D

1. $f(x) = {}^2\log x$
2. $f(x) = {}^2\log(x+2)$
3. $f(x) = \log x^2$
4. $f(x) = 2\log x$
5. $f(x) = \ln(x-e)$

Serie E

1. $f(x) = \sqrt{x} + 2$
2. $f(x) = 4 - 2\sqrt{x}$
3. $f(x) = 2 + \sqrt{x+4}$
4. $f(x) = \sqrt[3]{x}$
5. $f(x) = \sqrt[6]{x^2} - 1$

Serie F

1. $f(x) = \sin 3x$
2. $f(x) = 2\cos \pi x$
3. $f(x) = 12 + 8\sin \frac{2\pi}{6}(x-1)$
4. $f(x) = 3 - 2\cos 3(x - \frac{1}{3}\pi)$
5. $f(x) = -1 - 3\sin \frac{1}{10}\pi(x+5)$

Hoofdstuk 10

Vergelijkingen en ongelijkheden

10.1 Polynoomvergelijkingen

Polynoomvergelijkingen kunnen algemeen worden geschreven als:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots = 0,$$

met n een geheel getal.

Oplossingen kunnen soms gevonden worden door in factoren te ontbinden.

Voorbeelden:

- Los op: $x^5 - 4x^3 - 27x^2 + 108 = 0$

$$\begin{aligned}
&x^3(x^2-4) - 27(x^2-4) = 0\\
&(x^3-27)(x^2-4) = 0\\
&(x^3-27)(x-2)(x+2) = 0\\
&x = 3 \vee x = 2 \vee x = -2
\end{aligned}$$

- Los op: $(x^2 - 14)(x+4) = 5x(x+4)$:

$$\begin{aligned}
&(x^2-14)(x+4) - 5x(x+4) = 0\\
&(x^2-14-5x)(x+4) = 0\\
&(x+2)(x-7)(x-4) = 0\\
&x = -2 \vee x = 7 \vee x = -4
\end{aligned}$$

Los de volgende vergelijkingen op:

Serie A

1. $2x^2 + 7x - 4 = 0$
2. $x^4 + 6 = 7x^2$
3. $x^3 + 6x = 7x^2$
4. $x^4 - 42 = x^2$
5. $x^4 - 39x^2 = 10x^3$
6. $x^3 - 3x^2 = (x - 3)(x + 20)$
7. $(x - 2)^3 = x - 2$
8. $3x^3 - x^2 - 12x + 4 = 0$
9. $(x^2 - 4)(x + 3) = (x - 2)(4 - x^2)$
10. $x^6 - 4x^4 = 4x^2 - 16$

Serie B

1. $3x^2 + 7x - 6 = 0$
2. $x^4 = 2x^2 + 24$
3. $x^4 - 24x^2 = 10x^3$
4. $x^4 - 12 = x^2$
5. $x^4 - 33x^2 = 8x^3$
6. $x^3 + x^2 = (x + 1)(x + 2)$
7. $3x^2 + 4x - 4 = 0$
8. $x^3 - 3x^2 = (x - 3)(x + 12)$
9. $(x^2 - 4)(x - 3) = (x + 2)(x - 3)$
10. $3(x - 1)^2(x + 1) = (x + 1)^2)$

10.2 Polynoomongelijkheden

Een handig hulpmiddel bij ongelijkheden is een tekenschema. Tekenschema's geven op een getallenrechte met plussen en minnen aan waar een uitdrukking positief of negatief is. daar waar de uitdrukking nul is zetten we één of meerdere nullen op de getallenrechte. Bij elke nul op de getallenrechte is er sprake van tekenverandering.

Twee voorbeelden van tekenschema's:

- $f(x) = (x+3)(x-1)(x-2)$ heeft als tekenschema:

  Kijk bij één bepaalde gemakkelijke waarde van x (anders dan een nulpunt)naar de uitkomst $f(x)$. Als de uitkomst positief of negatief is geldt dat overal tussen de naburige nulpunten. Bij een 0 op de getallenrechte verandert het teken.

- $g(x) = (x+3)^3(x-1)(x-2)^2$ heeft als tekenschema:

  Bij -3 op de getallenrechte staat 3 keer een 0 omdat je daar een oplossing krijgt van $(x+3)^3 = 0$ oftewel $(x+3)(x+3)(x+3) = 0$. Zo'n nulpunt noemen we drievoudig. Dat betekent ook dat er drie keer tekenwisseling plaats vindt, want bij elke 0 verandert het teken.Als $g(x)$ dus positief is voor $x < 3$ zal $g(x)$ negatief zijn als $x > -3$.

  Bij 2 op de getallenrechte moet 2 keer een 0 komen, want $(x-2)^2$ is te schrijven als $(x-2)(x-2)$. Er vindt daarom 2 keer tekenwisseling plaats wat in feite betekent dat er geen tekenwisseling is bij de 2.

  Kortom, een n-voudig nulpunt geeft geen tekenwisseling als n even is en wel een tekenwisseling als n oneven is.

Voorbeelden

- Los op: $x^3 + 8x \le 6x^2$.

  Herleid eerst op: $x^3 - 6x^2 + 8x \le 0$. Ontbind vervolgens in factoren:

  $$x(x^2 - 6x + 8) = 0$$
  $$x(x-2)(x-4) = 0$$

  Tekenschema:

  De oplossing is dus: $x \le 0 \vee 2 \le x \le 4$

  of in intervalnotatie: $(-\infty, 0 \cup 2, 4$

- Los op: $x(x+3)^3(x-2)^2 \geq (x+3)^3(x-2)^2$

  $$x(x+3)^3(x-2)^2 - 1(x+3)^3(x-2)^2 \geq 0$$
  $$(x-1)(x+3)^3(x-2)^2 = 0$$

  Tekenschema:

  De oplossing is: $x \leq -3 \vee x \geq 1$

  of in intervalnotatie: $(-\infty, -3 \cup 1, \infty)$

Los de volgende ongelijkheden op:

Serie A

1. $x^2 \leq 25$
2. $(x-3)^2 \geq 1$
3. $(x-2)^2 \leq \frac{1}{4}$
4. $8 < x^2 + 2x$
5. $3(x+1) - 2(2x+3) > -(x-2)$
6. $35 < x^2 + 2x$
7. $(x^2-4)(x-4)^2 \leq 0$
8. $3(x+1) - 2(2x+3) > 5(x-2)$
9. $(x^2-7x+12)(x^2+2x-24) \leq 0$
10. $x^6 - 9x^3 + 8 \leq 0$

Serie B

1. $x^2 \geq 16$
2. $9x^2 \leq 16$
3. $(x-2)^2 \geq \frac{1}{9}$
4. $15 < x^2 + 2x$
5. $3(x-1) - 2(2x+3) > 5(x-2)$
6. $x^2 - 1 \geq 9 - 3x$
7. $(x^2-9)(x-3)^2 \leq 0$
8. $x^2(3x-5) - (2x+3)(3x-5) > 0$
9. $(x-1)(x-2)^2(x-3)^3 \geq 0$
10. $3x^3 - 12x \geq x^4 - 4x^2$

10.3 Breukvergelijkingen

Bij breukvergelijkingen zijn 'kruiselings vermenigvuldigen' en 'onder één noemer brengen' belangrijke technieken.

Voorbeelden:

- $\dfrac{2x+8}{3x-6} = \dfrac{x+5}{5}$
  Kruiselings vermenigvuldigen geeft:

$$(3x-6)(x+5) = 5(2x+8)$$
$$3x^2 + 9x - 30 = 10x + 40$$
$$3x^2 - x - 70 = 0$$
$$3x(x-5) + 14(x-5) = 0$$
$$(3x+14)(x-5) = 0$$
$$x = -\tfrac{14}{3} \vee x = 5$$

- $\dfrac{6}{x-1} + \dfrac{5}{x+1} = 3$
  We krijgen:

$$\frac{6(x+1)+5(x-1)}{(x-1)(x+1)} = 3$$
$$\frac{11x+1}{x^2-1} = 3$$
$$11x + 1 = 3x^2 - 3$$
$$3x^2 - 11x - 4 = 0$$
$$3x^2 - 12x + x - 4 = 0$$
$$3x(x-4) + 1(x-4) = 0$$
$$(x-4)(3x+1) = 0$$
$$x = -\tfrac{1}{3} \vee x = 4$$

10. Vergelijkingen en ongelijkheden

Los de volgende vergelijkingen op.

Serie A

1. $\dfrac{3}{x+1} = \dfrac{2}{x+2}$
2. $\dfrac{x-3}{x-1} - 3 = \dfrac{x}{x+2}$
3. $\dfrac{x-3}{x-1} - 2 = \dfrac{x-1}{x-3}$
4. $\dfrac{x^3-4x^2}{x-4} = 3$
5. $\dfrac{1}{x^2} - 2 = \dfrac{1}{x}$
6. $\dfrac{3}{2x-1} + x = 4$
7. $\dfrac{2x+3}{x} - \dfrac{x+1}{x-2} = 7$
8. $\dfrac{2x-1}{5} + \dfrac{x^2-3}{2x} = 2$
9. $\dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{x+8}{x^3+2}$
10. $\dfrac{3x-4}{2} + \dfrac{x^2}{x+2} = 2$

Serie B

1. $\dfrac{x^2+3x-2}{x+1} = 4$
2. $\dfrac{3x^2+5x-2}{x^2+3x+2} = 2$
3. $\dfrac{3x^2+6x+1}{x^2+2} = 2$
4. $\dfrac{3x^3+6x}{x^2+2} = 2$
5. $\dfrac{4}{x^2} + \dfrac{4}{x} = 3$
6. $\dfrac{3x-1}{x-5} - 3 = x$
7. $\dfrac{x}{x-4} - \dfrac{x}{x+3} = -\dfrac{7}{2}$
8. $\dfrac{x^2-4}{x^2+4} - \dfrac{1}{x-3} = 1$
9. $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{2x}{x+2} = 3$
10. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} = 1$

10.4 Breukongelijkheden

Bij breuken niet alleen bij een nulpunt van de teller, maar ook bij een nulpunt van de noemer kan het teken omwisselen. Bij tekenschema's worden daarom zowel de nulpunten van de teller als de nulpunten van de noemer aangegeven; deze laatste met een *. Overigens, in zo'n nulpunt van de noemer bestaat de functie dus niet.

Voorbeeld

- $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{5}{x+3} \leq 1$

$$\frac{2(x+3)}{(x-1)(x+3)} - \frac{5(x-1)}{(x-1)(x+3)} - \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)} \leq 0$$
$$\frac{-x^2-5x+14}{(x-1)(x+3)} \leq 0$$
$$\frac{(x+7)(x-2)}{(x-1)(x+3)} \geq 0$$

Tekenschema:

dus $x \leq -7 \vee -3 < x < 1 \vee x \geq 1$

Los de volgende ongelijkheden met breuken op.

Serie A

1. $\dfrac{x^2-2x-15}{x^2+4x+3} \leq 0$
2. $\dfrac{1}{x^2-3x-28} \geq 0$
3. $\dfrac{5}{2x+1} - \dfrac{2}{x-3} \leq 3$
4. $\dfrac{2x^2}{2x+3} - \dfrac{x^2}{x+2} > -3$
5. $\dfrac{3x}{2x-1} \geq \dfrac{2x-5}{x-2}$
6. $\dfrac{x-2}{x} \leq \dfrac{x-1}{x-3} + 1$
7. $\dfrac{3x-x^2}{2x-2} \leq 1$
8. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{(x-1)^3} < 1$
9. $\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-4x+3} - 1 > 0$
10. $\dfrac{2x+3}{x} - 2 > \dfrac{3x-8}{x-2}$

Serie B

1. $\dfrac{x-3}{x^2-3x-28} < 0$
2. $\dfrac{10x}{x^3+x} > 1$
3. $\dfrac{x^2-1}{x^2+1} - \dfrac{x+3}{x-2} \leq 4$
4. $\dfrac{x}{2x-5} + \dfrac{6}{x+1} \leq 2$
5. $\dfrac{6}{x+4} \leq \dfrac{5x+1}{x+1}$
6. $\dfrac{x}{x+4} - 1 \leq \dfrac{x-3}{3}$
7. $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-x-12} > \dfrac{5}{6}$
8. $\dfrac{x}{3x-1} + \dfrac{3}{2x+1} \geq 1$
9. $\dfrac{x}{x^3-2x} \geq \dfrac{1}{2}$
10. $\dfrac{24}{x+3} - \dfrac{3}{x-4} < \dfrac{7}{6}$

10.5 Exponentiële vergelijkingen

Bij onderstaande opgaven is het de bedoeling dat je herleidt tot een vergelijking met machten oftewel een uitdrukking van de vorm $a^{\text{uitdrukking met x}} = a^{\text{getal}}$. Je mag dan de machten gelijk stellen, waarna je de resulterende vergelijking nog dient op te lossen.

Gebruik de regels bij machten, bijvoorbeeld $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = 2^{2x}$.

Voorbeelden

- $2^{x+3} - 3 \cdot 2^x = 80$

$$\begin{aligned}
&2^3 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^x = 80\\
&8 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^x = 80\\
&5 \cdot 2^x = 80\\
&2^x = 16 = 2^4\\
&x = 4
\end{aligned}$$

- $2^x + 2^{3-x} = 6$

$$2^x + 8 \cdot 2^{-x} = 6.$$

Stel $2^x = a$, dan

$$\begin{aligned}
&a + 8 \cdot a^{-1} = 6\\
&a^2 - 6a + 8 = 0\\
&(a-2)(a-4) = 0\\
&a = 2 \vee a = 4\\
&2^x = 2 \vee 2^x = 4\\
&x = 1 \vee x = 2
\end{aligned}$$

Los de volgende exponentiële vergelijkingen op.

Serie A

1. $2^{x+1} + 2^{x+3} = 320$
2. $3^{x+1} = (\frac{1}{3})^{x-2}$
3. $3^{x+3} = 2160 + 3^{x-1}$
4. $4^x - 12 \cdot 2^x + 2^5 = 0$
5. $2^{x+3} = 60 + 2^{x-1}$
6. $16^{3x+3} = 8^{x^2+4}$
7. $2^{2x} + 64 = 2^{x+4}$
8. $3^{3x} - 2 \cdot 3^{2x+1} = 3^{x+3}$
9. $2^x + 2^{3-x} = 6$
10. $e^x = 2 \cdot e^{-x} + 1$

Serie B

1. $3^{x+3} = 6 + 3^{x+2}$
2. $9^x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
3. $3^{x+2} + 3^{x-1} = \frac{28}{27}$
4. $4 \cdot 3^{x+1} - 3^{2x} = 27$
5. $2^{x-1} = 5 - 4^x$
6. $4 \cdot 3^{2x+1} - 3^{3x} = 3^{x+3}$
7. $2^{^3\log x} = \frac{1}{4}$
8. $(\frac{1}{3}\sqrt{3})^x = 9$
9. $6 \cdot (\frac{1}{4})^x = \frac{3}{2}(\frac{1}{2})^x$
10. $600 \cdot (0.4)^x = 150 \cdot (0.8)^x$

10.6 Exponentiële ongelijkheden

Bij exponentiële ongelijkheden moet je met grondtallen kleiner dan 1 oppassen.
Bijvoorbeeld, $2^x > 2^4 \Leftrightarrow x > 4$ maar $(\frac{1}{2})^x > (\frac{1}{2})^4 \Leftrightarrow x < 4$.
Je had deze laatste conclusie ook als volgt kunnen trekken:

$$(2^{-1})^x > (2^{-1})^4 \Leftrightarrow 2^{-x} > 2^{-4} \Leftrightarrow -x > -4 \Leftrightarrow x < 4.$$

Voorbeelden

- We hebben

$$5^{x-1} + 5^{x-2} > 6\sqrt{5} \Leftrightarrow 5^x \cdot 5^{-1} + 5^x \cdot 5^{-2} > 6 \cdot 5^{\frac{1}{2}}$$

  Vermenigvuldig beide zijden met 5^2:

$$5 \cdot 5^x + 5^x > 6 \cdot 5^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow 6 \cdot 5^x > 6 \cdot 5^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}$$

- We hebben:

$$3^x + (\tfrac{1}{3})^{x-3} \leq 12 \Leftrightarrow 3^x + (3^{-1})^{x-3} \leq 12 \Leftrightarrow 3^x + 3^{3-x} \leq 12$$

  en

$$3^x + 3^3 \cdot 3^{-x} \leq 12 \Leftrightarrow 3^x + \frac{27}{3^x} \leq 12.$$

  Stel $3^x = a$ en bedenk dat dan $a > 0$!

$$a + \frac{27}{a} \leq 12 \Leftrightarrow a^2 + 27 \leq 12a.$$

  Dat mag omdat $a > 0$.

$$a^2 - 12a + 27 \leq 0 \Leftrightarrow (a-3)(a-9) \leq 0 \Leftrightarrow 3 \leq a \leq 9$$

  Dus

$$3^1 \leq 3^x \leq 3^2 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$$

Los de volgende exponentiële ongelijkheden op.

Serie A.

1. $(\frac{1}{2})^{2x-1} < 8$
2. $3 + 2^x \leq 2^{x+2} - 3$
3. $(2^x - 4)(2^x - 8) > 0$
4. $8^{x-1} \geq (\frac{1}{4})^x$
5. $2^x + 32 \cdot 2^{-x} \geq 12$
6. $\dfrac{6 - 5^x}{5^{1-x}} < 1$
7. $4^x > \frac{1}{4} \cdot 2^{3x}$
8. $2^x + 8 \cdot 2^{-x} \geq 6$
9. $2^{6x} - 4^{x+1} > 0$
10. $3^{3-2x} - 4 \cdot 3^{1-x} + 3 > 0$

Serie B

1. $1 - (\frac{1}{2})^{2x-2} \geq 0$
2. $9^x + 3^{x+1} > 18$
3. $\dfrac{2^{2x} - 8}{2^x - 4} \leq 0$
4. $9^{x+1} \geq \frac{1}{27}$
5. $2^x + 8 \cdot 2^{-x} \geq 9$
6. $3^x + 3^{3-x} < 12$
7. $5^x - 2 \cdot 5^{x-1} < 75$
8. $(\frac{1}{2})^{3x} - (\frac{1}{2})^{2x} \geq 0$
9. $6 \cdot 5^x - 5^{2x} < 5$
10. $(\frac{1}{3})^{2x-3} - 4 \cdot (\frac{1}{3})^{x-1} - 15 < 0$

10.7 Logaritmische vergelijkingen

De definitie van logaritme is: $a^c = b \Leftrightarrow {}^a\log b = c$.

Bekende regels zijn:

$$
\begin{aligned}
&{}^a\log x \text{ bestaat alleen als } x > 0,\\
&{}^a\log 1 = 0,\\
&\log a + \log b = \log ab,\\
&\log a - \log b = \log(\tfrac{a}{b}),\\
&\log a^r = r \log a,\\
&{}^a\log b = \frac{\ln b}{\ln a}
\end{aligned}
$$

Voorbeelden:

- Stel ${}^2\log(x+2) = 2 + {}^2\log(2x-1)$

  Dan geldt:

  $$
  \begin{aligned}
  &{}^2\log(x+2) = {}^2\log 4 + {}^2\log(2x-1) = {}^2\log 4(2x-1)\\
  &x + 2 = 8x - 4 \Leftrightarrow 6 = 7x \Leftrightarrow x = \frac{6}{7}
  \end{aligned}
  $$

- We hebben $\log^2 x - \log x^2 = 3 \Leftrightarrow \log^2 x - 2\log x - 3 = 0$.

  Stel $\log x = a$

  $$
  \begin{aligned}
  a^2 - 2a - 3 = 0 &\Leftrightarrow (a+1)(a-3) = 0 \Leftrightarrow a = -1 \vee a = 3\\
  &\Leftrightarrow \log x = -1 \vee \log x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{10} \vee x = 1000
  \end{aligned}
  $$

10. Vergelijkingen en ongelijkheden

Los de volgende vergelijkingen op.

Serie A

1. ${}^{x}\log 16 = 8$
2. $3^{{}^{2}\log(x-1)} = 9$
3. $\ln(x^2 - 7x + 7) = 0$
4. ${}^{2}\log x - 5 = {}^{\frac{1}{2}}\log(x + 14)$
5. ${}^{2}\log(x - 1) + {}^{2}\log(x + 13) = 5$
6. $\log(x^2 - 20x) = 2$
7. $\log(7 - x) = \frac{1}{2}\log(x - 1)$
8. ${}^{2}\log(x + 1) - 2 \cdot {}^{2}\log 5 = 3$
9. $\log^2 x + 6 = \log x^5$
10. $\ln^2 x + 2\ln x - 3 = 0$

Serie B

1. ${}^{2x}\log 27 = 3$
2. $4^{{}^{4}\log(8-2x)} = 2$
3. $\ln(x + e) - 2 = \ln x$
4. ${}^{2}\log(5 - x) + {}^{2}\log x = 2$
5. $2 + {}^{\frac{1}{3}}\log(2x - 1) = 1$
6. $\log x + \log(x + \frac{3}{2}) = 1$
7. ${}^{2}\log(x + 1) + {}^{\frac{1}{2}}\log(\dfrac{1}{x - 3}) = 5$
8. $\log(x + 3) - \log(x + 1) = 1$
9. $\log^2 x - \log x^3 + 2 = 0$
10. $\log(x^2 - 8) = -\log(\dfrac{1}{-2 - x})$

10.8 Logaritmische ongelijkheden

Een belangrijke stap bij het oplossen van logaritmische ongelijkheden is het bepalen van het domein. Oplossingen dienen uiteraard binnen het domein te liggen.

Ook hier opletten met bijvoorbeeld:

$$^{\frac{1}{2}}\log x < {}^{\frac{1}{2}}\log 4 \Rightarrow x > 4$$

Net zoals bij machten is er sprake van het omdraaien van het ongelijkheidsteken als het grondtal kleiner dan 1 is.

Voorbeelden:

- $^{\frac{1}{2}}\log x \geq 3 + {}^{\frac{1}{2}}\log(x+3)$.

  Hier geldt: $x > 0 \wedge x > -3$, dus $D = (0, \infty)$.

  $$^{\frac{1}{2}}\log x \geq {}^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{8} + {}^{\frac{1}{2}}\log(x+3) \Leftrightarrow {}^{\frac{1}{2}}\log x \geq {}^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{8}(x+3)$$

  en dus

  $$x \leq \frac{1}{8}(x+3) \Leftrightarrow 8x \leq x+3 \Leftrightarrow 7x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{7}$$

  Rekening houdend met het domein D is de oplossing: $(0, \frac{3}{7}$

- $^{3}\log(2x-3) < 3 - {}^{3}\log x$.

  We hebben:

  $$x > \frac{3}{2} \wedge x > 0 \Rightarrow D = (\frac{3}{2}, \infty)$$

  Hier moet gelden:

  $$^{3}\log(2x-3) + {}^{3}\log x < {}^{3}\log 27 \Leftrightarrow {}^{3}\log x(2x-3) < {}^{3}\log 27$$
  $$2x^2 - 3x - 27 < 0 \Leftrightarrow (2x-9)(x+3) < 0 \Leftrightarrow -3 < x < \frac{9}{2}$$

  Rekening houdend met het domein D is de oplossing: $(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$

Los de volgende logaritmische ongelijkheden op.

Serie A

1. ${}^{5}\log(2x+1) \leq 2$
2. ${}^{4}\log(x^2-3x) > 1$
3. ${}^{2}\log(x^2-4x-5) \leq 4$
4. $\dfrac{2-\ln x}{2+\ln x} \leq 0$
5. $3 - {}^{3}\log x \geq {}^{3}\log(x-6)$
6. ${}^{\frac{1}{3}}\log x^2 > -2$
7. $\ln(x-e)^2 > 1$
8. $x\ln x^3 - \ln x > 0$
9. ${}^{3}\log(x-1) \leq 2 - {}^{3}\log(x+7)$
10. $\ln|x| \geq \ln(3-\frac{1}{2}x)$

Serie B

1. ${}^{2}\log(x^2-x) \leq 1$
2. ${}^{4}\log(x^2+6x) \leq 2$
3. ${}^{2}\log(x^2-8x+7) \leq 4$
4. $\dfrac{2-\ln x}{1+\ln x} > 0$
5. ${}^{2}\log(x-2) < 3 - {}^{2}\log x$
6. $\dfrac{\ln(x-3)-1}{\ln x} \leq 0$
7. ${}^{3}\log(2^{2x}+1) \leq 2$
8. $x\log(x+4) + 4\log(x+4) \leq 0$
9. ${}^{2}\log(2^x-8) < 3$
10. $\dfrac{\log(2x+3)}{\log x} < 2$

10.9 Goniometrische vergelijkingen

Enkele regels:

$$\sin x = \sin a \Rightarrow x = a + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - a + k \cdot 2\pi$$
$$\cos x = \cos a \Rightarrow x = \pm a + k \cdot 2\pi$$
$$\tan x = \tan a \Rightarrow x = a + k \cdot \pi$$

Hierbij geldt steeds dat $k \epsilon \mathbb{Z}$, dus $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Voorbeelden:

- We hebben:

$$\cos(x - \frac{3}{4}\pi) = \sin 2x \Leftrightarrow \cos(x - \frac{3}{4}\pi) = \cos(\frac{1}{2}\pi - 2x)$$
$$x - \frac{3}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi - 2x + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{3}{4}\pi = -\frac{1}{2}\pi + 2x + k \cdot 2\pi$$
$$3x = \frac{5}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee -x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

- We hebben

$$2\sin^2 x = 3\cos x \Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 x) = 3\cos x \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$$

Stel $\cos x = a$ dan

$$2a^2 + 3a - 2 = 0 \Leftrightarrow (a + 2)(2a - 1) = 0 \Leftrightarrow a = -2 \vee a = \frac{1}{2}$$

Merk op dat $\cos x = -2$ niet is toegestaan, dus

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

Los de volgende goniometrische vergelijkingen op. Kies $\mathbb{R}$ als domein.

Serie A.

1. $\sin 2x = \sin x$
2. $\tan 2x + \tan x = 0$
3. $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) + \sin(3x - \frac{\pi}{4}) = 0$
4. $\cos 2x + \cos 3x = 0$
5. $\cos^2 x + 3\sin x = 3$
6. $2\sin^2 x \cos x - \sin x = 0$
7. $\tan 2x = 3\tan x$
8. $\sin 2x = \dfrac{1}{\tan x}$
9. $3\cos^2 x - \sin^2 x = 0$
10. $2\sin^2 x + \sin 2x = 1$
11. $\sin 2x - \cos 2x = 1$
12. $2\cos x + 3\tan x = 0$
13. $\sqrt{2 - 2\cos 2x} = -\sin x$
14. $(\tan x - \sin x)(\tan x + \sin x) = \cos^2 x$
15. $\sin x \cdot \sin 2x = \cos x$

Serie B

1. $\cos 2x = \cos 3x$
2. $\tan x = \sin 2x$
3. $\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) + \sin(x - \frac{1}{6}\pi) = 0$
4. $\sin x - \sin 3x = 0$
5. $\cos^2 x + 2\sin x \cos x = \sin^2 x$
6. $\sin 2x = 2\cos^2 x$
7. $2\tan x = \tan 2x$
8. $2\sin 2x = \dfrac{1}{\tan x}$
9. $\cos^2 x + \cos x = \sin^2 x$
10. $2\sin^2 2x + 6\sin^2 x = 3$
11. $6\cos^2 x + 11\sin x = 10$
12. $\sin 2x - \cos 2x = 1$
13. $\sin^2 x + 2\cos^2 x = 1 + \sin x \cos x$
14. $\sin 2x - \tan x = \sin x$
15. $\sin x + \cos x = 0$

10.10 Wortelvergelijkingen

Bij vergelijkingen met wortels moeten we steeds bedenken dat de uitdrukking onder het worteleken niet negatief mag zijn en dat de wortel een niet-negatief getal als uitkomst heeft. Controleer een gevonden oplossing altijd door deze in de oorspronkelijke vergelijking in te vullen:

Voorbeelden:

- We hebben:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2x+1} = 2x-5 \Rightarrow 2x+1 = (2x-5)^2\\
&2x+1 = 4x^2-20x+25 \Leftrightarrow 4x^2-22x+24=0\\
&2x^2-11x+12=0 \Leftrightarrow (x-4)(2x-3)=0\\
&x=4 \vee x=\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

  Aangezien $x = \frac{3}{2}$ een negatieve uitkomst voor een wortel geeft, blijft $x = 4$ als enige oplossing over.

- We hebben:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x}+\sqrt{2x+1} = 5 \Rightarrow x + 2\sqrt{2x^2+x} + 2x+1 = 25\\
&2\sqrt{2x^2+x} = 24-3x \Rightarrow 8x^2+4x = 576-144x+9x^2\\
&x^2-148x+576=0 \Leftrightarrow (x-4)(x-144)=0\\
&x=4 \vee x=144.
\end{aligned}$$

  Alleen $x = 4$ is een oplossing.

Los de volgende vergelijkingen met wortels op.

Serie A

1. $\sqrt{4x+1} = x - 1$
2. $\sqrt{2x-1} = x - 8$
3. $\sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3} - 2$
4. $2x - 3\sqrt{14-x} = 8$
5. $\dfrac{x+3)}{\sqrt{2x+1}} = 3$
6. $x\sqrt{x+3} = \dfrac{\sqrt{x+3}}{x}$
7. $x^2 - 3\sqrt{13+x^2} + 3 = 0$
8. $\sqrt{x - \sqrt{x-1}} = x$
9. $4\sqrt{4-p} - \frac{1}{3}(\sqrt{4-p})^3 - p\sqrt{4-p} = \frac{8}{3}$
10. Voor welke p raken de grafieken van $f(x) = 3x - \sqrt{2x+1}$ en $g(x) = 2x + p$ elkaar?

Serie B

1. $\sqrt{2x+1} = x - 7$
2. $\sqrt{2x+11} = 12 - x$
3. $\sqrt{x-1} = \sqrt{2x+5} - 2$
4. $\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = 2$
5. $\dfrac{x+\sqrt{13-x}}{2x-1} = 1$
6. $\dfrac{\sqrt{4x^2+x}}{x-1} = \sqrt{x}$
7. $\dfrac{x^2}{\sqrt{2x^2+3}} = \dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{x^2}$
8. $\sqrt{\frac{3}{2}x - \sqrt{8-x}} = 2$
9. $4\sqrt{2+x} - (\sqrt{2+x})^3 + 2x\sqrt{2+x} = 27$
10. Voor welke p raken de grafieken van $f(x) = \sqrt{5-x}$ en $g(x) = p - \frac{1}{2}x + 1$ elkaar?

10.11 Wortelongelijkheden

Ook hier moet rekening worden gehouden met het domein.

Bijvoorbeeld, als $\sqrt{x-1} < 2$, dan luidt de oplossing 1, 5) omdat $x \geq 1$.

Voorbeelden:

- We hebben:

$$2x + 3\sqrt{x} < 20 \Leftrightarrow 2x + 3\sqrt{x} - 20 < 0$$

  met $x \geq 0$. Los op:

$$3\sqrt{x} = 20 - 2x \Rightarrow 9x = 400 - 80x + 4x^2$$
$$4x^2 - 89x + 400 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 64x - 25x + 400 = 0$$
$$4x(x-16) - 25(x-16) = 0 \Leftrightarrow (4x-25)(x-16) = 0$$
$$x = \frac{25}{4} \vee x = 16.$$

  Alleen $x = \frac{25}{4}$ is mogelijk. De oplossing is: 0, $\frac{25}{4}$).

- We hebben:

$$\frac{3+\sqrt{x})}{\sqrt{x-5}} \leq 3.$$

  Het domein is $D = (5, \infty)$. Dan is de breuk altijd positief.

- Los op:

$$(3+\sqrt{x})/\sqrt{x-5} = 3$$

  We hebben:

$$\frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x-5}} = 3 \Leftrightarrow 3 + \sqrt{x} = 3\sqrt{x-5} \Rightarrow 9 + 6\sqrt{x} + x = 9(x-5)$$
$$6\sqrt{x} = 8x - 54 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 4x - 27 \Rightarrow 9x = 16x^2 - 216x + 729$$
$$16x^2 - 225x + 729 = 0 \Leftrightarrow 16x^2 - 144x - 81x + 729 = 0$$
$$16x(x-9) - 81(x-9) = 0 \Leftrightarrow (16x-81)(x-9) = 0$$
$$x = \frac{81}{16} \vee x = 9$$

  Alleen $x = 9$ voldoet. Vullen we namelijk in de ongelijkheid bijvoorbeeld $x = 6$ $(6 < 9)$ in, dan krijgen we een uitkomst die groter is dan 3. Maar als we bijvoorbeeld $x = 14$ invullen, krijgen we een oplossing die groter is dan 3. Dat betekent dat we getallen moeten hebben groter dan 9.

  Oplossing: $(9, \infty)$.

Los de volgende ongelijkheden met wortels op.

Serie A

1. $\sqrt{2x+7} \leq x-4$
2. $x - 5\sqrt{x+6} < 0$
3. $\dfrac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{5+x}} > 1$
4. $x - \sqrt{2x+1} \leq 1$
5. $\sqrt{(x-3)^2} > \frac{1}{3}$
6. $7 + \sqrt{3x-6} > 2x$
7. $\sqrt{x^2+x+5} \leq x+1$
8. $\sqrt{(x-3)^2} + x \leq \sqrt{6x+1}$
9. $\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} < 3$
10. $\sqrt{x+1} < |x-5|$

Serie B

1. $\sqrt{x-3} < \frac{1}{2}x - 1$
2. $x - \sqrt{x-3} < 5$
3. $\dfrac{\sqrt{3x+4}}{\sqrt{2x-4}} \geq 2$
4. $x - \sqrt{x-4} \leq 6$
5. $\sqrt{(x-3)^2} > 1$
6. $\frac{1}{2}\sqrt{x^2+3} < \sqrt{x}$
7. $\dfrac{(x-1)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}} > 1$
8. $\sqrt{x} \geq \sqrt{2x-7} - 3$
9. $\dfrac{6}{\sqrt{x^2-1}} > 3$
10. $\sqrt{x-3} < |2x-9|$

Hoofdstuk 11

Noemer wortelvrij maken (extra stof)

Bij onderstaande opgaven dien je de noemer van de breuk wortelvrij te maken.
Gebruik hiervoor bijvoorbeeld de regel: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.
Voorbeeld:

$$\frac{1}{3-\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} = \frac{3+\sqrt{3}}{3^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}$$

11. Noemer wortelvrij maken (extra stof)

Maak telkens de noemer wortelvrij:

Serie A

1. $\dfrac{1}{\sqrt{5}} - \dfrac{2}{\sqrt{2}-1} =$
2. $\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{2}{\sqrt{6}} =$
3. $\dfrac{3}{2\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} =$
4. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} =$
5. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} =$
6. $\dfrac{1}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} =$
7. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}-\sqrt{8}} =$
8. $\dfrac{1}{(1+\sqrt{2})^2} =$
9. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} =$
10. $\dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} =$

Serie B

1. $\dfrac{2}{\sqrt{3}} - \dfrac{3}{\sqrt{5}-1} =$
2. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{3}{\sqrt{6}} =$
3. $\dfrac{3}{2\sqrt{5}} - \dfrac{1}{\sqrt{5}} =$
4. $\dfrac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}} =$
5. $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} =$
6. $\dfrac{2}{2\sqrt{5}-\sqrt{3}} =$
7. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}-\sqrt{12}} =$
8. $\dfrac{1}{(3-\sqrt{2})^2} =$
9. $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1} =$
10. $\dfrac{\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} =$

Hoofdstuk 12

Breuksplitsen A (extra stof)

Bij de volgende serie breuken is de noemer een product van factoren of kan er een product van factoren van worden gemaakt.

Het is de bedoeling dat er twee breuken van worden gemaakt met als noemers de afzonderlijke factoren. Dit heet breuksplitsing.

Voorbeelden:

- We hebben:

$$\frac{x+10}{(2x-1)(x+3)} = \frac{3}{2x-1} - \frac{1}{x+3}$$

  Nu is dit eenvoudig te controleren maar hoe kom je aan de tellers?
  $\dfrac{x+10}{(2x-1)(x+3)}$ vervangen we door $\dfrac{A}{2x-1}+\dfrac{B}{x+3}$ waarbij we A en B moeten berekenen.
  Maak van de uitdrukking weer één breuk:

$$\frac{A(x+3)+B(2x-1)}{(2x-1)(x+3)} = \frac{(A+2B)x+(3A-B)}{(2x-1)(x+3)}$$

  Nu moet $A+2B=1$ en $3A-B=10$. Als je dit stelsel van twee vergelijkingen oplost, krijg je $A=3$ en $B=-1$.

- Los op:

$$\frac{3}{(2x+3)(x+4)} = ?$$

  We stellen:

$$\frac{3}{(2x+3)(x+4)} = \frac{A}{2x+3}+\frac{B}{x+4} = \frac{A(x+4)+B(2x+3)}{(2x+3)(x+4)} = \frac{(A+2B)x+(4A+3B)}{(2x+3)(x+4)}$$

  Nu moet $A+2B=0$ en $4A+3B=3$. Dit stelsel oplossen geeft $A=\frac{6}{5}$ en $B=-\frac{3}{5}$.

  We kunnen daarom $\dfrac{3}{(2x+3)(x+4)}$ vervangen door $\dfrac{6}{5(2x+3)}-\dfrac{3}{5(x+4)}$.

- Vanwege het dubbele nulpunt in de teller gaat de volgende breuk iets anders:

  $$\frac{2x+1}{(x-3)^2} = ?$$

  De teller veranderen we in een vorm waarin $x-3$ voorkomt:

  $$\frac{2x+1}{(x-3)^2} = \frac{2(x-3)+7}{(x-3)^2} = \frac{2}{x-3} + \frac{7}{(x-3)^2}$$

Splits onderstaande uitdrukking in breuken:

Serie A

1. $\dfrac{5}{(2x-1)(x-3)} =$
2. $\dfrac{1}{x^2-1} =$
3. $\dfrac{2x}{(x-1)(x-3)} =$
4. $\dfrac{x}{x^2-x-2} =$
5. $\dfrac{2x}{x^2-2x} =$
6. $\dfrac{2x}{(x-2)^2} =$
7. $\dfrac{x+4}{9x^2-6x+1} =$
8. $\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2} =$
9. $\dfrac{2x}{(x-1)^2} =$
10. $\dfrac{x^4-4}{(x^2+1)^2} =$

Serie B

1. $\dfrac{5}{(2x+1)(x+3)} =$
2. $\dfrac{1}{4x^2-9} =$
3. $\dfrac{4x}{(x+1)(x-3)} =$
4. $\dfrac{3x}{x^2-x-6} =$
5. $\dfrac{3x}{-x^2+3x} =$
6. $\dfrac{6x}{(x-3)^2} =$
7. $\dfrac{x+4}{4x^2-4x+1} =$
8. $\dfrac{x^2-4}{(x-2)^2} =$
9. $\dfrac{6x}{(x-3)^2} =$
10. $\dfrac{x^4-9}{(x^2+3)^2} =$

Hoofdstuk 13

Breuksplitsen B (extra stof)

Hieronder staat nog een aantal voorbeelden met opgaven waarbij een breuk wordt opgesplitst in meerdere delen.

Voorbeelden

- Zo is
$$\frac{23}{7} = 3 + \frac{2}{7}.$$
We kunnen op 2 manieren aan die uitkomst komen:
$$\frac{23}{7} = \frac{21+2}{7} = \frac{21}{7} + \frac{2}{7} = 3 + \frac{2}{7}.$$
We hebben:
$$\begin{array}{l} 7/23\backslash 3 \\ \quad 21 \\ \quad\;\; 2 \end{array}$$
en dus
$$\frac{23}{7} = 3 + \frac{2}{7}.$$
Dit kan altijd als de teller groter is dan de noemer.

- Ditzelfde kunnen we ook doen met gebroken functies:
$$\frac{3x+1}{x+3} = \frac{3x+9-8}{x+3} = 3 - \frac{8}{x+3}$$
Of:
$$\begin{array}{l} x+3/3x+1\backslash 3 \\ \qquad\quad \underline{3x+9} \\ \qquad\qquad\; -8 \end{array}$$

en dus

$$\frac{3x+1}{x+3} = 3 - \frac{8}{x+3}$$

- We hebben:

$$\begin{array}{lllll}
2x-1/ & \frac{1}{2}x^2 & -3x+1\backslash \frac{1}{4}x - \frac{11}{8} \\
 & \underline{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x} & \\
 & & -\frac{11}{4}x + 1 \\
 & & \underline{-\frac{11}{4}x + \frac{11}{8}} \\
 & & \qquad -\frac{3}{8}
\end{array}$$

en dus

$$\frac{\frac{1}{2}x^2 - 3x + 1}{2x-1} = \frac{1}{4}x - \frac{11}{8} - \frac{3}{8}\frac{1}{2x-1}$$

De methode uit de laatste twee voorbeelden kan worden toegepast als de graad van de teller groter dan of gelijk is aan de graad van de noemer.

13. Breuksplitsen B (extra stof)

Pas op onderstaande opgaven breuksplitsen toe zoals hierboven.

Serie A

1. $\dfrac{6x^2 - 11x + 5}{x - 1} =$
2. $\dfrac{x^2 + 8x}{2x - 1} =$
3. $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} =$
4. $\dfrac{x^3}{x^2 - 1} =$
5. $\dfrac{x^4 - 1}{x - 1} =$
6. $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{1 - x} =$
7. $\dfrac{2x^2 - 4x + 5}{x - 1} =$
8. $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1} =$
9. $\dfrac{x^3 - 2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4} =$
10. $\dfrac{x^4 + x^2 - 2x^3 - 2x + 1}{x^2 + 1} =$

Serie B

1. $\dfrac{4x^2 + x - 5}{x - 1} =$
2. $\dfrac{x^2 + 4x}{2x - 1} =$
3. $\dfrac{x^2 + 5x - 14}{x - 2} =$
4. $\dfrac{x^4}{x^2 + 1} =$
5. $\dfrac{x^4 - 16}{x + 2} =$
6. $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{3 + x} =$
7. $\dfrac{2x^2 - 4x + 5}{x - 2} =$
8. $\dfrac{x^3 - 6x^2 + 5x + 6}{x - 2} =$
9. $\dfrac{2x^3 - 2x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1} =$
10. $\dfrac{x^4 + x^2 + 2x^3 - 2x + 1}{x^2 + 1} =$

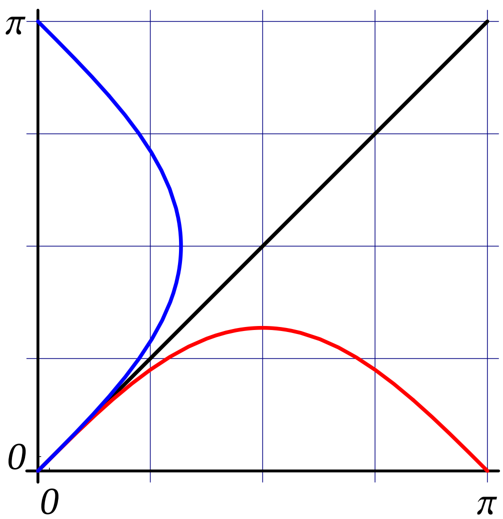
Hoofdstuk 14

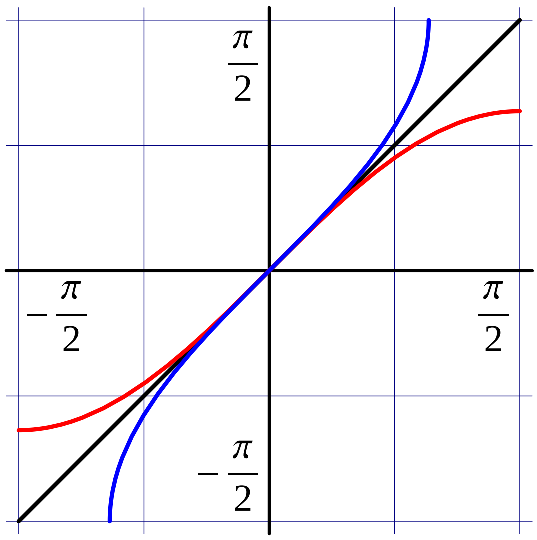
Cyclometrische functies (extra stof)

In het voortgezet onderwijs hebben we al met inverse functies te maken gekregen. Zo zijn $\log x$ en 10^x inverse functies van elkaar evenals bijvoorbeeld $\sqrt{x}$ en x^2 voor $x \geq 0$. Op de rekenmachine staan deze functies op een toets en daarboven. Je ziet dan dat $\ln x$ en e^x ook elkaars inversen zijn.

Een eigenschap van inverse functies is dat de grafieken elkaars spiegelbeeld zijn indien gespiegeld wordt in de lijn $y = x$. Domein en bereik hoeven voor een functie en zijn inverse niet hetzelfde te zijn, controleer maar voor bovenstaande functies. De functies $\sin x$, $\cos x$ en $\tan x$ hebben inverse functies op een beperkt domein. $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x$ en $\tan^{-1} x$ staat er vaak op rekenmachines; wij zullen het hebben over $\arcsin x$, $\arccos x$ en $\arctan x$.

We gaan na wat voor de laatste functies het domein en bereik is door te spiegelen. De tekening links hieronder toont de grafiek van $y = \sin x$ gespiegeld in de lijn $y = x$.





We zien in de linkerfiguur duidelijk dat de gespiegelde grafiek geen functie meer voorstelt indien het domein gelijk is aan $0, \pi$.

Indien het domein voor $\sin x$ gelijk is aan $D = -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi$, is de inverse wél een functie.

Bij deze keuze van het domein zitten we zo dicht mogelijk in de buurt van de oorsprong en zijn alle uitkomsten van $\sin x$ mogelijk mogelijk (van -1 tot en met 1). Zie de bovenstaande figuur.

Het bereik van $y = \sin x$ is $B = -1, 1$.

De inverse functie van $y = \sin(x)$ noemen we $y = \arcsin x$. Hiervoor geldt het domein $D = -1, 1$, terwijl $B = -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi$.

Zo kunnen we ook de grafieken van $y = \cos x$ en $y = \tan x$ spiegelen in de grafiek van $y = x$.

1. Ga op dezelfde manier na dat voor $y = \arccos x$ geldt dat $D = -1, 1$ en gekozen bereik $B = 0, \pi$.
2. Ga verder na dat voor $y = \arctan x$ geldt dat $D = (-\infty, \infty)$ en gekozen bereik $B = (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

Zoals we hiervoor bepaald hebben welke mogelijke uitkomsten er waren bij $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, zo kunnen we nu een uitkomst geven van $\arcsin(-\frac{1}{2}\sqrt{3})$.

Het grote verschil is dat we nu maar één uitkomst hebben, logisch omdat dit eigen is aan het functiebegrip.

Daarom:

$$\arcsin(-\frac{1}{2}\sqrt{3}) = -\frac{1}{3}\pi.$$

Geef telkens de uitkomst uitgedrukt in π (radialen).

Serie A

1. $\arcsin(\frac{1}{2}) =$
2. $\arccos(-\frac{1}{2}\sqrt{2}) =$
3. $\arctan(\sqrt{3}) =$
4. $\arccos(\frac{1}{2}\sqrt{3}) =$
5. $\arctan(1) =$
6. $\arcsin(-1) =$
7. $\arccos(\frac{1}{2}\sqrt{2}) =$
8. $\arctan(\frac{1}{3}\sqrt{3}) =$
9. $\arcsin(0) =$
10. $\arccos(-1) =$

Serie B

1. $\arccos(\frac{1}{2}) =$
2. $\arcsin(-\frac{1}{2}\sqrt{2}) =$
3. $\arctan(-\sqrt{3}) =$
4. $\arcsin(\frac{1}{2}\sqrt{3}) =$
5. $\arccos(1) =$
6. $\arctan(-1) =$
7. $\arcsin(\frac{1}{2}\sqrt{2}) =$
8. $\arccos(\frac{1}{2}\sqrt{3}) =$
9. $\arctan(0) =$
10. $\arcsin(-1) =$

Hoofdstuk 15

Antwoorden

2.1 Machten

Serie A

1. $p^{16}q^{16}$
2. $a^{11}b^5$
3. $-\frac{4}{9}c^{-1}d^{10}$
4. $-27a^3b^{\frac{3}{2}}$
5. $2\sqrt{2}ab$
6. $2p^{\frac{1}{4}}q^{\frac{5}{12}}$
7. $-3a^{-3}b^{-8}$
8. $12^{\frac{1}{4}}ab^{\frac{3}{4}}$
9. $\frac{3}{2}a^{-\frac{8}{3}}b^{\frac{7}{3}}$
10. $2^{-\frac{5}{4}}a^{\frac{1}{4}}$

Serie B

1. $p^{18}q^{16}$
2. $-b^5$
3. $-\frac{8}{27}c^2d^{13}$
4. $-32a^5b^{\frac{15}{2}}$
5. $3\sqrt{2}ab$
6. $2p^{-\frac{1}{2}}q^{\frac{5}{6}}$
7. $-3a^{-1}b^4$
8. $(\frac{8}{3})^{\frac{1}{12}}a^{\frac{1}{12}}b^{\frac{1}{6}}$
9. $\frac{3}{2}a^{-\frac{17}{5}}b^{\frac{5}{2}}$
10. $2^{-\frac{4}{3}}a^{\frac{1}{6}}$

3.1 Herleiden

Serie A

1. $9a^2 - 6ab + b^2$
2. $9a^2 - 12a^3 + 4a^4$
3. $162 - 108\sqrt{2}$
4. $3m^2 - 5mn - 2n^2$
5. $2\sqrt{3} + 6$
6. $9a^4b^6 - 2a^6b^4 + \frac{1}{9}a^8b^2$
7. $21 - 12a^2$
8. $7b - 7a + ab + 6a^2 - 2b^2 - 5$
9. $\frac{16}{5}$
10. $81a^4 - 1$

Serie B

1. $9a^2 - 12ab + 4b^2$
2. $9a^2 - 12a^4 + 4a^6$
3. $147 - 36\sqrt{5}$
4. $6m^2 - 5mn - 6n^2$
5. $-3\sqrt{5} - 8$
6. $\frac{1}{16}a^4b^2 - a^6b^4 + 4a^8b^6$
7. $30 - 12a^2$
8. $14b - 5a - 5ab + 6a^2 - 6b^2 - 4$
9. $\frac{4}{5}$
10. $16a^4 - 1$

3.2 Herleiden

Serie A

1. $(2x-3)(2x+3)(4x^2+9)$
2. $3x^3(x+3)(x-7)$
3. $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$
4. $(x^2-2)(x^2+3)$
5. $(x-2)(x-17)$
6. $(x+2)(x-17)$
7. $(x-1)^2$
8. $(x-1)(x+x^2+1)$
9. $(5x+1)(x-5)$
10. $(x^3-3)^2$

Serie B

1. $(3x-2)(3x+2)(9x^2+4)$
2. $3x^2(x-1)(x-4)$
3. $(x^3-2)(x^3+2)(x^6+4)$
4. $(x^2+4)(x^2-5)$
5. $(x-2)(x-19)$
6. $(x+2)(x-19)$
7. $2(x+1)^2$
8. $(x-1)(x+x^2-1)$
9. $4(4x+1)(x-4)$
10. $(x^5+4)^2$

3.3 Herleiden

Serie A

1. $(3x-2)(x-6)$
2. $(x+2)(2x+3)$
3. $(3x^2-2)(x^2-3)$
4. $(2x+3)(5-x)$
5. $(2x^2-3)(x^2+1)$
6. $(x-1)(x-4)(x+1)$
7. $(x-3)(2x^2+1)$
8. $(x+5)(x-2)(x+2)$
9. $(2-x)(3x^2-2)$
10. $x(x^3-3)(x^3+5)$

Serie B

1. $(3x-5)(x-3)$
2. $(x+3)(2x+3)$
3. $(3x^2-4)(x^2-3)$
4. $(x+3)(7-2x)$
5. $2(x^2+2)(x-1)(x+1)$
6. $(x-1)(x-8)(x+1)$
7. $(x-4)(3x^2+2)$
8. $(x+5)(3x^2-4)$
9. $(2-x)(2x^2-3)$
10. $x^2(x^3+2)(x^3-6)$

4.1 Rationale breuken

Serie A

1. $\frac{2x^2+2x+3}{(2x-1)(x+1)}$
2. $\frac{2\sqrt{x}}{x-1}$
3. $\frac{4x}{(x-1)(x+3)}$
4. $-\frac{3(2x^2-3x-3)}{(x-1)(x+3)}$
5. $\frac{3x-2}{(x+1)(2x+3)}$
6. $\frac{2x-3}{2(x-2)}$
7. $\frac{x+6}{(3-x^2)(2x+1)}$
8. $\frac{x^2+1}{(x+1)^3}$
9. $\frac{2x^2-x+1}{(x-1)^2(x+1)}$
10. $\frac{2x^2+11x-3}{2x(x+3)}$

Serie B

1. $-\frac{2(2x^2-2x-1)}{(2x-1)(x+1)}$
2. $\frac{2\sqrt{2x}}{2x-9}$
3. $\frac{4x^2+3x-6}{(x^2-3)(2x+3)}$
4. $\frac{3(2x^2-x+2)}{(x-1)(x+2)}$
5. $\frac{(x-2)(7x+4)}{(x^2+1)(2x+3)}$
6. $\frac{2x-3}{2(x+3)}$
7. $-\frac{7x}{(x-3)(2x+1)}$
8. $\frac{x^2+1}{(x-1)^3}$
9. $\frac{2x+1}{(x-1)(x+1)}$
10. $\frac{x^2-2x+6}{x(x-3)}$

5.1 Goniometrie

Serie A

1. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
2. -1
3. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
4. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
5. 1
6. -1
7. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
8. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
9. $-\frac{1}{2}$
10. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Serie B

1. $-\frac{1}{2}$
2. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
3. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
4. $-\frac{1}{2}$
5. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
6. niet gedefinieerd.
7. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
8. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
9. $-\sqrt{3}$
10. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

6.1 Goniometrische formules

1. We hebben:

$$\begin{aligned}
\sin(x-y) &= \sin(x+(-y)) = \sin x\cos(-y)+\cos x\sin(-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y \\
\cos(x+y) &= \sin(\tfrac{1}{2}\pi - x - y) = \sin((\tfrac{1}{2}\pi - x) - y) \\
&= \sin(\tfrac{1}{2}\pi - x)\cos y - \cos(\tfrac{1}{2}\pi - x)\sin y = \cos x\cos y - \sin x\sin y \\
\cos(x-y) &= \cos(x+(-y)) = \cos x\cos(-y) - \sin x\sin(-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y
\end{aligned}$$

2. We hebben:

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x\cos y + \cos x\sin y}{\cos x\cos y - \sin x\sin y}$$

(deel boven en onder door $\cos x \cos y$)

$$= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$$

$$\tan(x-y) = \tan(x+(-y)) = \frac{\tan x + \tan(-y)}{1-\tan x\tan(-y)} = \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x\tan y}$$

3. We hebben:

$$
\begin{aligned}
\sin 2x &= \sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x \\
\cos 2x &= \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x = \\
&= (1-\sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1 \\
\tan 2x &= \tan(x+x) = \frac{\tan x + \tan x}{1 - \tan x \tan x} = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}
\end{aligned}
$$

4. We hebben:

$$\cos(x - \frac{1}{6}\pi) = \cos x \cos \frac{1}{6}\pi + \sin x \sin \frac{1}{6}\pi$$

Omdat x in het eerste kwadrant ligt is ook $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

$$\cos x \cos \tfrac{1}{6}\pi = \sin x \sin \tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{6} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}$$

5. We hebben:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Omdat $x \in \frac{1}{2}\pi, \pi$ geldt: $\sin x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

6. We hebben:

$$\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{16}{9} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{7}{9} \Rightarrow \tan x = \pm\frac{1}{3}\sqrt{7}$$

Omdat $x \in 0, \frac{1}{2}\pi$ geldt: $\tan x = \frac{1}{3}\sqrt{7}$ en dus

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{7}}{1-\frac{7}{9}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2}\sqrt{7} = 3\sqrt{7}$$

6.2 Goniometrische formules

Serie A

1. $(2\cos x + 1)\sin x$
2. $2\sin x \cos y$
3. $(1 - \sin x)(1 + \sin x) = \cos^2 x$
4. $\sin x(\sin x + 2\cos x)$
5. $2(\cos x - 1)(\cos x + 1) = -2\sin^2 x$
6. $(\sin x - 1)(\sin x - 4)$
7. $(\cos x + 1)(6 - \cos x)$
8. $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$
9. $2\sin x$
10. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ en 2

Serie B

1. $2\sin x(\sin x - \cos x)$
2. $(\cos x - 1)(\cos x + 1) = -\sin^2 x$
3. $(\cos x - 2\sin x)\cos x$
4. $-2(\sin x - 2)(\sin x + 2)$
5. $(\sin x + 2)(\sin x - 3)$
6. $(\sin x + 2)(5 - \sin x)$
7. $\left|\dfrac{1-\cos x}{\sin x}\right|$
8. $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
9. $\cos^2 2x$
10. $-1, 1, -\frac{1}{2}\pi$ of $1, -1, \frac{1}{2}\pi$

7.3 Differentiëren

Serie A.

1. $30(1-2x)^4$
2. $-\dfrac{1}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$
3. $6x(x^2-5)^{-2}$
4. $-27(3x-1)^{-4}$
5. $4\ln 3 \cdot 3^{2x}$
6. $4xe^{x^2-1}$
7. $\ln(3x+4)+\dfrac{3x}{3x+4}$
8. $\dfrac{1}{x+x^2}$
9. $x^2 \cdot 2^{2x}(2x\ln 2+3)$
10. $\frac{3}{2}\dfrac{9x-2}{\sqrt{3x-1}}$
11. $\dfrac{1}{x(\ln x-1)^2}$
12. $e^x(x^2-x-3)$
13. $3(\tan^2 x)(\tan^2 x+1)$
14. $\dfrac{2}{\sin 2x+1}$
15. $-\dfrac{\cos x}{\cos^2 x-1}$

Serie B

1. $2\ln x+2\ln 3+2$
2. $\dfrac{1-\ln x}{x^2}$
3. $\cos 2x(\sin 2x)^{-\frac{1}{2}}$
4. $-3x(3x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$
5. $7(x-1)^{-2}$
6. $-2\cos(4x+\frac{1}{6}\pi)$
7. $\dfrac{2\ln x\sin x-x\ln^2 x\cos x}{x\sin^2 x}$
8. $(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$
9. $3(6x-2)^{-1}$
10. $2\sin(2x)e^{-\cos 2x}$
11. $-e^{-x}$
12. $\dfrac{4\ln^3 x}{x}$
13. $\sin x(2\cos^2 x-\sin^2 x)$
14. $\dfrac{\cos x-\cos 2x}{(1-\cos x)^2}$
15. $\dfrac{\sin x}{\sin^2 x-1}$

8.1 Primitiveren

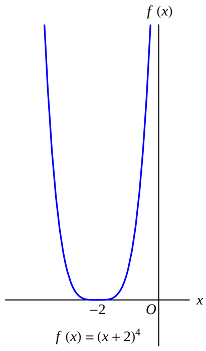
Serie A

1. $\frac{1}{8}(2x-1)^4$
2. $-\frac{1}{3}(5-x)^3$
3. $\frac{2}{9}(3x-4)^{\frac{3}{2}}$
4. $-\frac{1}{6}(2x+3)^{-3}$
5. $-\frac{1}{2}\cos 2(x-\frac{1}{6}\pi)$
6. $2\sqrt{x+3}$
7. $\frac{1}{2}x^2+\ln|x|$
8. $-\cos x+\frac{1}{3}e^{3x}$
9. $\tan x - x$
10. $-\ln|x-\frac{3}{2}|$

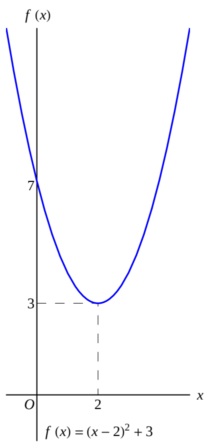
Serie B

1. $\frac{1}{12}(3x+2)^4$
2. $-\frac{1}{6}(8-2x)^3$
3. $\frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}}$
4. $\frac{1}{8}(2x-1)^{-4}$
5. $2\sin\frac{1}{2}(x-\frac{1}{3}\pi)$
6. $4\sqrt{x-5}$
7. $\frac{1}{3}x^3-\ln|x|$
8. $\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}e^{2x}$
9. $x+\tan x$
10. $-\ln|x-\frac{2}{3}|$

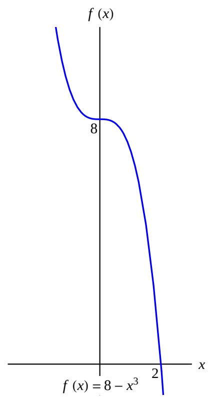
9. Oefening grafieken tekenen



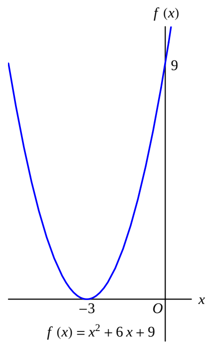
A1



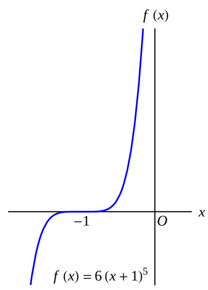
A2



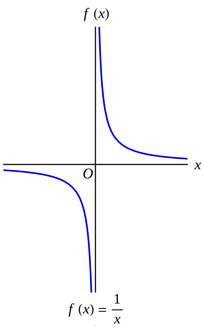
A3



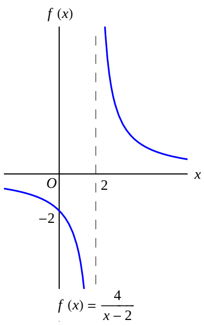
A4



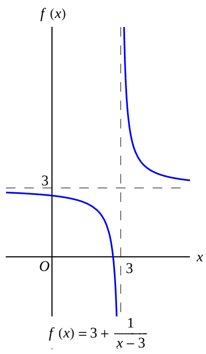
A5



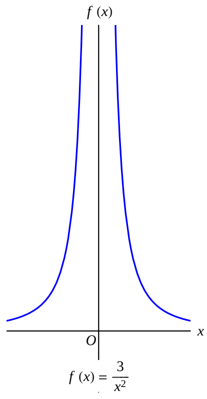
B1



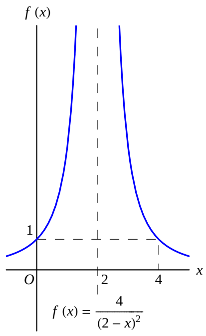
B2



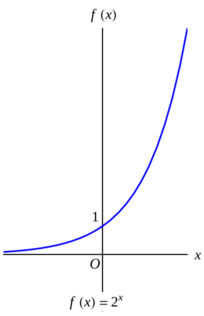
B3



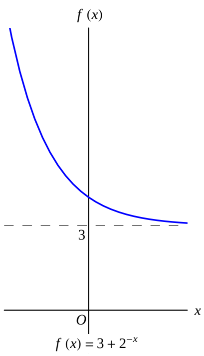
B4



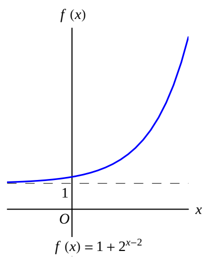
B5



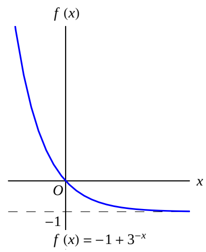
C1



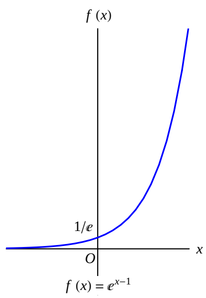
C2



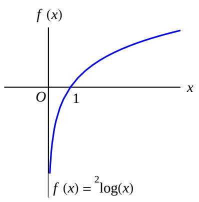
C3



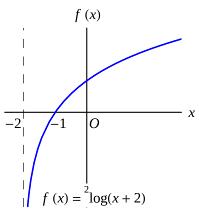
C4



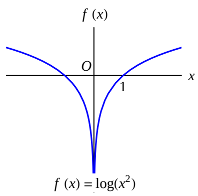
C5



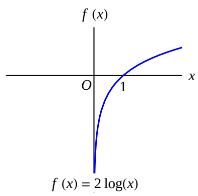
D1



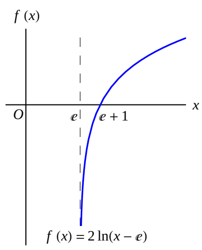
D2



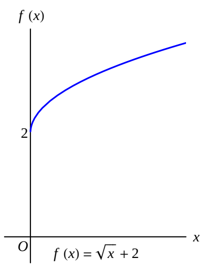
D3



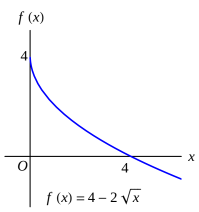
D4



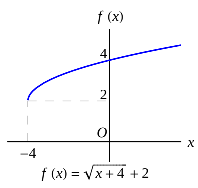
D5



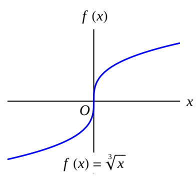
E1



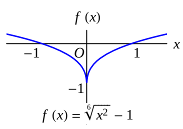
E2



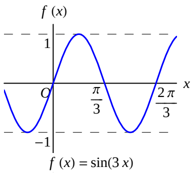
E3



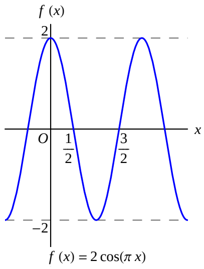
E4



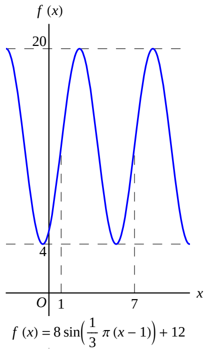
E5



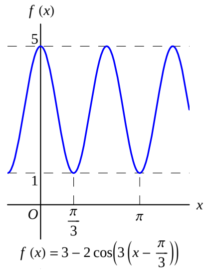
F1



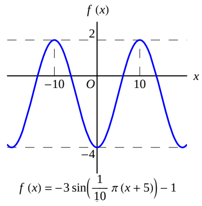
F2



F3



F4



F5

10.1 Polynoomvergelijkingen

Serie A

1. $\{x = -4\}, \{x = \frac{1}{2}\}$
2. $\{x = 1\}, \{x = -1\}, \{x = \sqrt{6}\}, \{x = -\sqrt{6}\}$
3. $\{x = 0\}, \{x = 1\}, \{x = 6\}$
4. $\{x = \sqrt{7}\}, \{x = -\sqrt{7}\}$
5. $\{x = 0\}, \{x = 0\}, \{x = -3\}, \{x = 13\}$
6. $\{x = 5\}, \{x = -4\}, \{x = 3\}$
7. $\{x = 1\}, \{x = 2\}, \{x = 3\}$
8. $\{x = 2\}, \{x = \frac{1}{3}\}, \{x = -2\}$
9. $\{x = 2\}, \{x = -\frac{1}{2}\}, \{x = -2\}$
10. $\{x = 2\}, \{x = -2\}, \{x = \sqrt{2}\}, \{x = -\sqrt{2}\}$

Serie B

1. $\{x = -3\}, \{x = \frac{2}{3}\}$
2. $\{x = \sqrt{6}\}, \{x = -\sqrt{6}\}$
3. $\{x = 0\}, \{x = 0\}, \{x = -2\}, \{x = 12\}$
4. $\{x = 2\}, \{x = -2\}$
5. $\{x = 0\}, \{x = 0\}, \{x = -3\}, \{x = 11\}$
6. $\{x = 2\}, \{x = -1\}, \{x = -1\}$
7. $\{x = -2\}, \{x = \frac{2}{3}\}$
8. $\{x = -3\}, \{x = 3\}, \{x = 4\}$
9. $\{x = -2\}, \{x = 3\}, \{x = 3\}$
10. $\{x = 2\}, \{x = \frac{1}{3}\}, \{x = -1\}$

10.2 Polynoomongelijkheden

Serie A

1. $-5, 5$
2. $(-\infty, 2 \cup 4, \infty)$
3. $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$
4. $(2, \infty) \cup (-\infty, -4)$
5. $\emptyset$
6. $(5, \infty) \cup (-\infty, -7)$
7. $\{4\} \cup -2, 2$
8. $(-\infty, \frac{7}{6})$
9. $\{4\} \cup -6, 3$
10. $1, 2$

Serie B

1. $4, \infty) \cup (-\infty, -4$
2. $-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}$
3. $(-\infty, \frac{5}{3} \cup \frac{7}{3}, \infty)$
4. $(3, \infty) \cup -\infty, -5)$
5. $(-\infty, \frac{1}{6})$
6. $2, \infty) \cup (-\infty, -5$
7. $-3, 3$
8. $(-1, \frac{5}{3}) \cup (3, \infty)$
9. $\{2\} \cup (-\infty, 1 \cup 3, \infty)$
10. $-2, 0 \cup 2, 3$

10.3 Breukvergelijkingen

Serie A

1. $\{x = -4\}$
2. $\{x = 0\}, \{x = -1\}$
3. $\{x = \sqrt{2} + 1\}, \{x = 1 - \sqrt{2}\}$
4. $\{x = \sqrt{3}\}, \{x = -\sqrt{3}\}$
5. $\{x = -1\}, \{x = \frac{1}{2}\}$
6. $\{x = 1\}, \{x = \frac{7}{2}\}$
7. $\{x = 1\}, \{x = 1\}$
8. $\{x = -\frac{5}{9}\}, \{x = 3\}$
9. $\{x = -\frac{6}{5}\}, \{x = -\frac{1}{2}\}$
10. $\{x = -\frac{8}{5}\}, \{x = 2\}$

Serie B

1. $\{x = -2\}, \{x = 3\}$
2. $\{x = 3\}$
3. $\{x = 2\sqrt{3} - 3\}, \{x = -2\sqrt{3} - 3\}$
4. $\{x = \frac{2}{3}\}$
5. $\{x = -\frac{2}{3}\}, \{x = 2\}$
6. $\{x = -2\}, \{x = 7\}$
7. $\{x = -4\}, \{x = 3\}$
8. $\{x = -10\}, \{x = 2\}$
9. $\{x = 2\}$
10. $\{x = -1\}, \{x = 1\}, \{x = 1\}$

10.4 Breukongelijkheden

Serie A

1. $(-1, 5$
2. $(-\infty, -4) \cup (7, \infty)$
3. $\frac{2}{3}, 2 \cup (3, \infty) \cup (-\infty, -\frac{1}{2})$
4. $(-\infty, -2) \cup (-\frac{3}{2}, \infty)$
5. $(2, 5 \cup (\frac{1}{2}, 1$
6. $(0, 2 \cup (3, \infty) \cup (-\infty, -3$
7. $-1, 1) \cup 2, \infty)$
8. $(1, 2) \cup (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$
9. $(1, 3) \cup (9, \infty)$
10. $(2, 3) \cup (0, \frac{2}{3})$

Serie B

1. $(3, 7) \cup (-\infty, -4)$
2. $(-3, 3)$
3. $(2, \infty) \cup (-\infty, 1$
4. $(-\infty, -1) \cup 5, \infty) \cup \frac{4}{3}, \frac{5}{2})$
5. $-2, -1 \cup (1, \infty) \cup (-\infty, -4)$
6. $(-4, -1 \cup 0, \infty)$
7. $(4, 6) \cup (-\infty, -3) \cup (13, \infty)$
8. $(\frac{1}{3}, 2 \cup (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$
9. $(\sqrt{2}, 2 \cup -2, -\sqrt{2})$
10. $(4, 6) \cup (-\infty, -3) \cup (13, \infty)$

10.5 Exponentiële vergelijkingen

Serie A

1. $\{x = 5\}$
2. $\{x = \frac{1}{2}\}$
3. $\{x = 4\}$
4. $\{x = 2\}, \{x = 3\}$
5. $\{x = 3\}$
6. $\{x = 0\}, \{x = 4\}$
7. $\{x = 3\}$
8. $\{x = 2\}$
9. $\{x = 1\}, \{x = 2\}$
10. $\{x = \ln 2\}$

Serie B

1. $\{x = -1\}$
2. $\{x = -\frac{1}{4}\}$
3. $\{x = -2\}$
4. $\{x = 1\}, \{x = 2\}$
5. $\{x = 1\}$
6. $\{x = 1\}, \{x = 2\}$
7. $\{x = \frac{1}{9}\}$
8. $\{x = -4\}$
9. $\{x = 2\}$
10. $\{x = 2\}$

10.6 Exponentiële ongelijkheden

Serie A

1. $(-1, \infty)$
2. $1, \infty)$
3. $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$
4. $\frac{3}{5}, \infty)$
5. $(-\infty, 2 \cup 3, \infty)$
6. $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$
7. $(-\infty, 2)$
8. $(-\infty, 1 \cup 2, \infty)$
9. $(\frac{1}{2}, \infty)$
10. $(-\infty, 0)$

Serie B

1. $1, \infty)$
2. $1, \infty)$
3. $\frac{3}{2}, 2)$
4. $-\frac{5}{2}, \infty)$
5. $(-\infty, 0 \cup (3, \infty)$
6. $(1, 2)$
7. $(-\infty, 3)$
8. $-\infty, 0$
9. $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$
10. $(0, \infty)$

10.7 Logaritmische vergelijkingen

Serie A

1. $\{x = \sqrt{2}\}$
2. $\{x = 5\}$
3. $\{x = 1\}, \{x = 6\}$
4. $\{x = 2\}$
5. $\{x = 3\}$
6. $\{x = 10 - 10\sqrt{2}\}$, $\{x = 10 + 10\sqrt{2}\}$
7. $\{x = 5\}$
8. $\{x = 199\}$
9. $\{x = 100\}, \{x = 1000\}$
10. $\{x = e\}$,$\{x = e^{-3}\}$

Serie B

1. $\{x = \frac{3}{2}\}$
2. $\{x = 3\}$
3. $\{x = e/(e^2 - 1)\}$
4. $\{x = 1\}, \{x = 4\}$
5. $\{x = 2\}$
6. $\{x = \frac{5}{2}\}$
7. $\{x = 7\}$
8. $\{x = -\frac{7}{9}\}$
9. $\{x = 10\}, \{x = 100\}$
10. $\{x = -3\}$

10.8 Logaritmische ongelijkheden

Serie A

1. $(-\frac{1}{2}, 12$
2. $(-\infty, -1) \cup (4, \infty)$
3. $-3, -1) \cup (5, 7$
4. $(0, e^{-2}) \cup (e^2, \infty)$
5. $(6, 9$
6. $(-3, 0) \cup (0, 3)$
7. $(-\infty, e - \sqrt{e}) \cup (e + \sqrt{e}, \infty)$
8. $(0, \frac{1}{3}) \cup (1, \infty)$
9. $(1, 2$
10. $(-\infty, -6 \cup 2, 6)$

Serie B

1. $-1, 0) \cup (1, 2$
2. $-8, -6) \cup (0, 2$
3. $-1, -1) \cup (7, 9$
4. (e^{-1}, e^2)
5. $(2, 4)$
6. $(3, e + 3$
7. $(-\infty, \frac{3}{2})$
8. $(-4, -3 \cup (-1, \infty)$
9. $(3, 4)$
10. $(0, 1) \cup (3, \infty)$

10.9 Goniometrische vergelijkingen

Serie A

1. $\{2k\pi\} \cup \{\frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3}k\pi\}$
2. $\{\frac{1}{3}k\pi\}$
3. $\{\frac{2}{5}k\pi\} \cup \{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\}$
4. $\{\frac{1}{5}\pi + \frac{2}{5}k\pi\}$
5. $\{\frac{1}{2}\pi + 2k\pi\}$
6. $\{k\pi\} \cup \{\frac{1}{4}\pi + k\pi\}$
7. $\{k\pi\} \cup \{\frac{1}{6}\pi + k\pi\} \cup \{\frac{5}{6}\pi + k\pi\}$
8. $\{\frac{1}{2}\pi + k\pi\} \cup \{\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi\}$
9. $\{\frac{1}{3}\pi + k\pi\} \cup \{\frac{2}{3}\pi + k\pi\}$
10. $\{\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{2}k\pi\}$
11. $\{\frac{1}{4}\pi + k\pi\} \cup \{\frac{1}{2}\pi + k\pi\}$
12. $\{\frac{7}{6}\pi + 2k\pi\} \cup \{\frac{11}{6}k\pi + 2k\pi\}$
13. $\{k\pi\}$
14. $\{\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi\}$
15. $\{\frac{1}{2}\pi + k\pi\} \cup \{\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi\}$

Serie B

1. $\{2k\pi\} \cup \{\frac{2}{5}k\pi\}$
2. $\{k\pi\} \cup \{\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi\}$
3. $\{\frac{2}{3}k\pi\}$
4. $\{k\pi\} \cup \{\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi\}$
5. $\{\frac{3}{8}\pi + \frac{1}{2}k\pi\}$
6. $\{\frac{1}{2}\pi + k\pi\} \cup \{\frac{1}{4}\pi + k\pi\}$
7. $\{k\pi\}$
8. $\{\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{3}k\pi\}$
9. $\{\frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3}k\pi\}$
10. $\{\frac{1}{6}\pi + k\pi\} \cup \{\frac{5}{6}\pi + k\pi\}$
11. $\{\frac{1}{6}\pi + 2k\pi\} \cup \{\frac{5}{6}\pi + 2k\pi\}$
12. $\{\frac{1}{4}\pi + k\pi\} \cup \{\frac{1}{2}\pi + k\pi\}$
13. $\{\frac{1}{4}\pi + k\pi\} \cup \{\frac{1}{2}\pi + k\pi\}$
14. $\{\frac{2}{3}k\pi\}$
15. $\{\frac{3}{4}\pi + k\pi\}$

10.10 Wortelvergelijkingen

Serie A

1. $\{x = 6\}$
2. $\{x = 13\}$
3. $\{x = 3\}, \{x = 11\}$
4. $\{x = \frac{31}{4}\}$
5. $\{x = 12\}, \{x = 0\}$
6. $\{x = -3\}, \{x = 1\}, \{x = -1\}$
7. $\{x = 2\sqrt{3}\}, \{x = -2\sqrt{3}\}$
8. $\{x = 1\}$
9. $\{p = 4 - 2\sqrt[3]{2}\}$
10. $\{p = -1\}$

Serie B

1. $\{x = 12\}$
2. $\{x = 7\}$
3. $\{x = 10\}, \{x = 2\}$
4. $\{x = 9\}$
5. $\{x = 4\}$
6. $\{x = 0\}, \{x = 6\}$
7. $\{x = \sqrt{3}\}, \{x = -\sqrt{3}\}$
8. $\{x = 4\}$
9. $\{x = 7\}$
10. $\{p = 2\}$

10.11 Wortelongelijkheden

Serie A

1. $9, \infty)$
2. $-6, 30)$
3. $(-5, 0)$
4. $-\frac{1}{2}, 4$
5. $(-\infty, \frac{8}{3}) \cup (\frac{10}{3}, \infty)$
6. $2, 5)$
7. $4, \infty)$
8. $\frac{4}{3}, 4$
9. $(0, 1) \cup (4, \infty)$
10. $-1, 3) \cup (8, \infty)$

Serie B

1. $3, 4) \cup (4, \infty)$
2. $3, 7)$
3. $(2, 4$
4. $4, 8$
5. $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$
6. $(1, 3)$
7. $5, \infty)$
8. $\frac{7}{2}, 64$
9. $(-\sqrt{5}, -1) \cup (1, \sqrt{5})$
10. $3, 4) \cup (\frac{21}{4}, \infty)$

11.1 Noemer wortelvrij maken (extra stof)

Serie A

1. $2\sqrt{3} - 3$
2. $\frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{6}$
3. $\frac{5}{6}\sqrt{3}$
4. $\frac{2}{3}\sqrt{3} + 1$
5. $2\sqrt{6} + 5$
6. $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{3}$
7. 1
8. $3 - 2\sqrt{2}$
9. $\sqrt{2} + 1$
10. $\frac{1}{5}\sqrt{5} - 2\sqrt{2} - 2$

Serie B

1. $-\frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{5}{4}$
2. $\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{6}$
3. $\frac{1}{10}\sqrt{5}$
4. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$
5. $\frac{7}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{10}$
6. $\frac{2}{17}\sqrt{3} + \frac{4}{17}\sqrt{5}$
7. $\frac{1}{2}$
8. $\frac{6}{49}\sqrt{2} + \frac{11}{49}$
9. $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}$
10. $\frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{3}{4}\sqrt{5} - \frac{3}{4}$

12 Breuksplitsen A (extra stof)

Serie A

1. $(x-3)^{-1} - 2(2x-1)^{-1}$
2. $\frac{1}{2}(x-1)^{-1} - \frac{1}{2}(x+1)^{-1}$
3. $3(x-3)^{-1} - (x-1)^{-1}$
4. $\frac{1}{3}(x+1)^{-1} + \frac{2}{3}(x-2)^{-1}$
5. $2(x-2)^{-1}$
6. $2(x-2)^{-1} + 4(x-2)^{-2}$
7. $\frac{1}{3}(3x-1)^{-1} + \frac{13}{3}(3x-1)^{-2}$
8. $2(x-1)^{-1} + 1$
9. $2(x-1)^{-1} + 2(x-1)^{-2}$
10. $1 - 3(x^2+1)^{-2} - 2(x^2+1)^{-1}$

Serie B

1. $2(2x+1)^{-1} - (x+3)^{-1}$
2. $\frac{1}{6}(2x-3)^{-1} - \frac{1}{6}(2x+3)^{-1}$
3. $(x+1)^{-1} + 3(x-3)^{-1}$
4. $\frac{6}{5}(x+2)^{-1} + \frac{9}{5}(x-3)^{-1}$
5. $3(3-x)^{-1}$
6. $6(x-3)^{-1} + 18(x-3)^{-2}$
7. $\frac{1}{2}(2x-1)^{-1} + \frac{9}{2}(2x-1)^{-2}$
8. $4(x-2)^{-1} + 1$
9. $6(x-3)^{-1} + 18(x-3)^{-2}$
10. $1 - 6(x^2+3)^{-1}$

13 Breuksplitsen B(extra stof)

Serie A

1. $6x-5$
2. $2x+17+17(2x-1)^{-1}$
3. $x-1$
4. $x+\frac{1}{2}(x-1)^{-1}+\frac{1}{2}(x+1)^{-1}$
5. $x+x^2+x^3+1$
6. $-x-3$
7. $2x-2+3(x-1)^{-1}$
8. $x^2-2x+1=(x-1)^2$
9. $x-2+(7x-10)/(x^2-4)$
   $=x+(x-2)^{-1}+6(x+2)^{-1}-2$
10. $x^2-2x+(x^2+1)^{-1}$

Serie B

1. $4x+5$
2. $2x+9+9(2x-1)^{-1}$
3. $x+7$
4. $x^2-1+(x^2+1)^{-1}$
5. x^3-2x^2+4x-8
6. $x-1$
7. $2x+5(x-2)^{-1}$
8. x^2-4x-3
9. $2x-2+(5x-3)/(x^2-1)$
10. $x^2+2x+(1-4x)/(x^2+1)$

14 Cyclometrische functies (extra stof)

1. De grafiek van $y=\sin x$ kon gespiegeld worden in de lijn $y=x$ waarbij de beeldfiguur een grafiek van een functie bleef als we voor x het domein $-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi$ kozen. Bij dat domein hadden we te maken met een grafiek die overal stijgend is.

   Het moet geen probleem zijn dat dit ook geldt voor een grafiek die overal daalt. Dus met een domein $\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$ zou de beeldfiguur ook een grafiek van een functie zijn.

   Dit is met een grafische rekenmachine te controleren door voor de TI-83 in te voeren:

   ```
   y1=sin(x)
   ```

   en dan met `DrawInv y1` uit het Draw-menu te kijken naar de gespiegelde grafiek. Datzelfde kun je gaan controleren voor $y=\cos x$ binnen $0, \pi$.

2. Zie boven.

14 Cyclometrische functies (extra stof)

Serie A

1. $\frac{1}{6}\pi$
2. $\frac{3}{4}\pi$
3. $\frac{1}{3}\pi$
4. $\frac{1}{6}\pi$
5. $\frac{1}{4}\pi$
6. $-\frac{1}{2}\pi$
7. $\frac{1}{4}\pi$
8. $\frac{1}{6}\pi$
9. 0
10. π

Serie B

1. $\frac{1}{3}\pi$
2. $-\frac{1}{4}\pi$
3. $-\frac{1}{3}\pi$
4. $\frac{1}{3}\pi$
5. 0
6. $-\frac{1}{4}\pi$
7. $\frac{1}{4}\pi$
8. $\frac{1}{6}\pi$
9. 0
10. $-\frac{1}{2}\pi$