KWADRATISCHE FUNCTIES

Ontbinden in factoren

BEGRIPPEN

Som

De som van twee getallen betekend deze bij elkaar optellen.

De som van 5 en 10 is $5 + 10 = 15$.

De som van 12 en $3\frac{3}{4}$ is $12 + 3\frac{3}{4} = 15\frac{3}{4}$

De som van $5x$ en $6x$ is $5x + 6x = 11x$

De som van $12x$ en $3x^2$ is $12x + 3x^2 = 3x^2 + 12$

x^2 en x kunnen niet bij elkaar opgeteld worden, omdat zij niet dezelfde soort termen zijn

BEGRIPPEN

Product

Het product van twee getallen betekend deze vermenigvuldigen met elkaar.

Het product van 3 en 8 is $3 \cdot 8 = 24$.

Het product van 5 en $\frac{1}{2}$ is $5 \cdot \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$

Het product van x en $3x$ is $x \cdot 3x = 3x^2$

Het product van $2x$ en $3y$ is $2x \cdot 3y = 6xy$

BEGRIPPEN

Gemene deler
Getallen die deelbaar zijn door hetzelfde getal hebben een gemene deler.

Gemene deler 8 en 12 is 4, want $8 = 4 \cdot 4$ en $12 = 4 \cdot 3$.

Gemene deler 9 en 6 is 3, want $9 = 3 \cdot 3$ en $6 = 3 \cdot 2$

Gemene deler $6x^2$ en $4x$ is $2x$, want $6x^2 = 2x \cdot 3x$ en $4x = 2x \cdot 2$

HAAKJES UITWERKEN

$a(b + c) = ab + ac$

$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Voorbeelden:

- $5(x + 3) = 5x + 15$
- $x(x - 3) = x^2 - 3x$
- $(x + 2)(x - 3) = x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - x - 6$
- $(x + 5)(x - 5) = x^2 - 5x + 5x - 25 = x^2 - 25$

TERUGWERKEN NAAR HAAKJES

Mogelijkheid 1: $a(x + b)$

Stap 1: Zoek naar de gemene deler.

Stap 2: Zet dit getal voor de haakjes.

Stap 3: De getallen in de haakjes zijn de oorspronkelijke getallen delen door wat voor de haakjes staan.

Voorbeelden:

$5x + 10 = 5(x + 2)$

$3x^2 + 9x = 3x(x + 3)$

TERUGWERKEN NAAR HAAKJES

<u>Mogelijkheid 2: $(x+c)(x+d)$</u>

Gegeven is x^2+ax+b

Stap 1: Maak gebruik van de product-sommethode. Teken de tabel.

Product van b		Som is a

Stap 2: Kies twee getallen wat keer elkaar b is. Vul deze in de tabel.
Tel deze getallen bij elkaar op en vul deze in bij som.

Stap 3: Wanneer twee getallen gevonden zijn die als som het getal *a* hebben, kunnen de twee getallen ingevuld worden bij *c* en *d*.

TERUGWERKEN NAAR HAAKJES

<u>Mogelijkheid 2: $(x + c)(x + d)$</u>

Voorbeeld:

$x^2 + 7x + 10$

Product van 10		Som is 7
1	10	11
-2	-5	-7
2	5	7

De getallen 2 en 5 komen tussen de haakjes te staan.

Dus: $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$

TERUGWERKEN NAAR HAAKJES

<u>Mogelijkheid 2: $(x + c)(x + d)$</u>

Voorbeeld:

$x^2 + 3x - 18$

Product van -18		**Som is 3**
2	9	11
3	6	18
-3	6	3

De getallen -3 en 6 komen tussen de haakjes te staan.

Dus: $x^2 + 3x - 18 = (x - 3)(x + 6)$

TERUGWERKEN NAAR HAAKJES

<u>Mogelijkheid 2: $(x+c)(x+d)$</u>

Speciaal geval!

$x^2 - a$ is te herschrijven naar $(x+c)(x+d)$.

In dit geval zal het zijn: $(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$

Voorbeelden:

$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

$x^2 - 36 = (x+6)(x-6)$

KWADRATISCHE FUNCTIES

Kwadraat afsplitsen

KWADRAAT AFSPLITSEN

Techniek:

$ax^2 + bx + c$ omschrijven naar $a(x + p)^2 + q$

SITUATIE 1: $a = 1$

Wanneer $a = 1$ gebruiken we de volgende vuistregels:

$$x^2 + 2bx + b^2 = (x + b)^2$$
$$x^2 - 2bx + b^2 = (x - b)^2$$
$$x^2 + 2bx = (x + b)^2 - b^2$$
$$x^2 - 2bx = (x - b)^2 - b^2$$

Deze regels helpen bij het kwadraat afsplitsen.

SITUATIE 1: $a = 1$

Voorbeeld 1: De c in $ax^2 + bx + c$ komt overeen met b^2 in de vuistregels

Splits van $y = x^2 + 6x + 9$ *een kwadraat af.*

$$x^2 + 2bx + b^2 = (x + b)^2$$
$$x^2 - 2bx + b^2 = (x - b)^2$$

In dit geval is $b = 3$, want

$x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2$

We kunnen de formule als volgt herschrijven:

$y = x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

Situatie 1: $a = 1$

Voorbeeld 2: Er is geen b^2 aanwezig
Splits van $y = x^2 + 4x$ het kwadraat af.

Er is geen b^2 aanwezig, maar we kunnen wel kwadraat afsplitsen.
Uiteindelijk zullen we de b^2 aftrekken na het kwadraat afsplitsen.

$$x^2 + 2bx = (x + b)^2 - b^2$$
$$x^2 - 2bx = (x - b)^2 - b^2$$

$x^2 + 4x = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x$

In dit geval is $b = 2$. Om een kwadraat af te kunnen splitsen, zal er een b^2 toegevoegd moeten worden. Maar omdat er in de oorspronkelijke formule geen b^2 staat, halen we deze er van af.

$x^2 + 4x = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x$
$= x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 2^2$ $\quad (+2^2 - 2^2 = 0)$
$= (x^2 + 4x + 2^2) - 2^2$
$= (x + 2)^2 - 4$ $\quad (x^2 + 4x + 2 = (x + 2)^2)$

Situatie 1: $a = 1$

Voorbeeld 3: de c in $ax^2 + bx + c$ is geen b^2 in $x^2 + 2bx + b^2$

Splits van $y = x^2 + 36x + 10$ een kwadraat af.

$x^2 + 36x + 10 = x^2 + 2 \cdot 18 \cdot x$

In dit geval is $b = 18$. Het kwadraat hiervan zal toegevoegd en afgetrokken moeten worden zoals voorgaand voorbeeld.

Het zal er als volgt uitzien.

$x^2 + 36x + 10 = x^2 + 2 \cdot 18 \cdot x$

$= x^2 + 2 \cdot 18 \cdot x + 18^2 - 18^2 + 10$

$= (x^2 + 36x + 18^2) - 18^2 + 10$

$= (x + 18)^2 - 324 + 10$

$= (x + 18)^2 - 314$

$$\boxed{\begin{aligned} x^2 + 2bx &= (x + b)^2 - b^2 \\ x^2 - 2bx &= (x - b)^2 - b^2 \end{aligned}}$$

$\boxed{(+18^2 - 18^2 = 0)}$

$\boxed{(-18^2 + 10 = -324 + 10 = -314)}$

SITUATIE 2: $a \neq 1$

In dit geval zoeken we eerst naar de gemene deler, zodat we alsnog naar de b kunnen zoeken.

<u>Voorbeeld:</u>
Splits van $y = 5x^2 + 10x - 3$ een kwadraat af.

$$5x^2 + 10x - 3 = 5(x^2 + 2x) - 3$$
$$= 5(x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x) - 3$$
$$= 5(x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2 - 1^2) - 3$$
$$= 5((x + 1)^2 - 1) - 3$$
$$= 5(x + 1)^2 - 5 - 3$$
$$= 5(x + 1)^2 - 8$$

(de -3 houden we buiten de haakjes. Zo zijn er geen breuken)

$$x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2$$
$$= x^2 + 2x + 1$$
$$= (x + 1)(x + 1)$$
$$= (x + 1)^2$$

$$x^2 + 2bx = (x + b)^2 - b^2$$
$$x^2 - 2bx = (x - b)^2 - b^2$$

SITUATIE 2: $a \neq 1$

<u>Snelle techniek</u>

$ax^2 + bx + c = a(x+p)^2 + q$

$ax^2 + bx + c = ax^2 + 2apx + ap^2 + q$

Hieruit volgt:

$a = a\,; b = 2ap\,; c = ap^2 + q$

Herschrijven leidt tot:

$$a = a\,;\ p = \frac{b}{2a}\,; q = c - \frac{b^2}{4a}$$

Eindresultaat:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Hiermee kan in een keer een formule met de vorm $y = ax^2 + bx + c$ herschreven worden naar de vorm $y = a(x+p)^2 + q$