HERHALING.

N = natuurlijke getallen: 0, 1, 2, 3, ...

Z = gehele getallen: ....-3. -2. -1, o, 1, 2, 3, ...

Q = rationale getallen (alles) -3- 5/2, $-\frac{13}{3482}$, 0, 1, $\frac{4}{3}$, 7, ...

R = reeël getallen: -3, $-\frac{5}{2}$, - 2. $-\frac{12}{13}$, 0, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$, 4, ...

Enkele begrippen uit de verzamelingenleer.

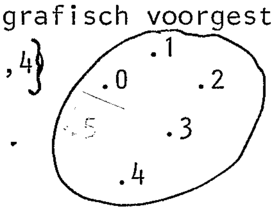
Een verzameling is een aantal elementen die door een bepaald voorschrift gegeven zijn.

Voorbeeld 1: $\{0,1,2,3,4\}$ (eindige verz.)

Voorbeeld 2: $\{x/x \text{ is even}\}$ (oneindige verz.)

Een verzameling kan grafisch voorgesteld worden d.m.v. een Venn-diagram.

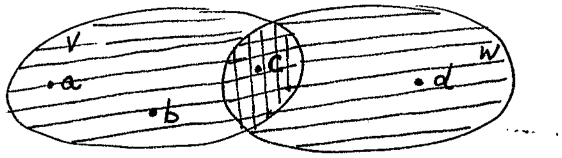
V = $\{0,1,2,3,4\}$



2 is een element van V: $2 \in V$

5 is geen element van V: $5 \notin V$

Het begrip doorsnede en vereniging:



▦ $V \cap W$: doorsnede van V en W

▤ $V \cup W$: vereniging van V en W

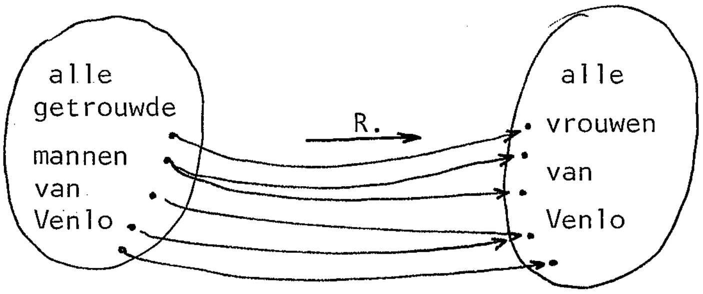
Voor c geldt: $c \in V \wedge c \in W \Longleftrightarrow c \in V \cap W$

Als voor een element x geldt: $x \in V \vee x \in W \Longleftrightarrow x \in V \cup W$

Het begrip relatie en functie.

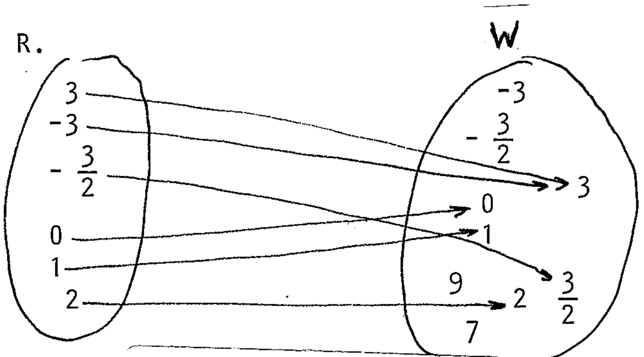
Een relatie tussen twee verzamelingen is een voorschrift dat aan elk element van de ene verzameling een element van de andere verzameling toevoegt.

Voorbeeld 1:



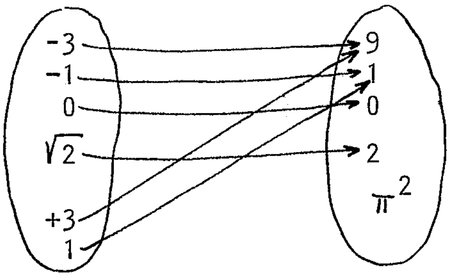
R: voeg aan elke man zijn vrouw en geliefde toe.

Voorbeeld 2:



R: voeg aan elk element van V zijn absolute waarde toe. getal of nul toe.

Voorbeeld 3: Rel.: voeg aan elk getal van R zijn kwadraat toe.



Door een relatie worden er paren gevormd, die een nieuwe verzameling vormen: Relatieverzameling.

ad voorbeeld 3: $R = \{(-3,9);\ (3,9):(1,1);\ (\ 2,2);\ .....\}$

De verzameling eerste elementen van de paren vormen het domein: D_R

De verzameling tweede elementen het bereik: B_R

Een functie is een relatie waarbij elk origineel slechts één beeld heeft.

Voorbeeld 1: $R = \{(x1,y1);\ (x2,y1);\ (x3,y1);\ (x1\ y2)\}$: geen functie want x1 heeft 2 verschill.beelden.

Voorbeeld 2: $R = \{(x1,y2);\ (x2,y1)\}$: wel een functie.

Voorbeeld 3: $R = \{(x,y)\ /\ y = x^2\}$: wel een functie (/ betekent waarvoor geldt)

Voorbeeld 4: $R = \{(x,y)\ /\ y = \sqrt{x}\ ;\ x\ E\ R^+\}$: wel een functie.

Voorbeeld 5: $R = \{(x,y)\ /\ x2 + y2 = 25\}$: geen functie.

Begrip Interval zie Boek.

$\{(x_1, y_1) ; (x_2, y_2) ; (x_3, y_3)\}$

De inverse van ee = $\{(y_1, x_1) ; (y_2, x_2) ; (y_3, x_3)\}$ e.

De inverse van een Relatie (R^{inv}) vinden we door de paren van de relatie om te keren.

$D_r = B_r$inv. (x3 y3)}

$B_r = D_r$inv. ; (y3 x3)}

DR = Binv.
BR = DRinv.

Voorbeeld 2: R = {(x,y) / y = x2 ∧ x E R}

R^{inv} = {(y,x) / y = x2 ∧ x E R}

De inverse van een functie.

De inverse van een functie levert niet altijd wederom een functie op.

Voorbeeld 1: f = {(x,y) / y = x^2}; enkele elementen zijn (1,1)(-1,1)(0,0)

Door de functie te inverteren krijgen we de verzameling (1,1)(1,-1); ...... wat géén functie is (2 originelen gelijk).

Voorbeeld 2: De inverse van een functie f is wel een functie als bij de oorspronkelijke functie elk beeld slechts één keer voorkomt.

f = {(x,y) / y = 2x + 3} (lineaire functies)
f^{inv} = {(y,x) / y = 2x + 3}

Omdat het eerste element van een paar op de x-as wordt uitgezet schrijft men voor f^{inv}.

f^{inv} = {(x,y) /x = 2y + 3}
of
$f^{inv} = \{(x,y) / y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\}$

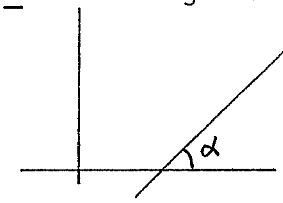
De grafieken van f en f^{inv} zijn elkanders gespiegelde t.o.v. de lijn y = x.

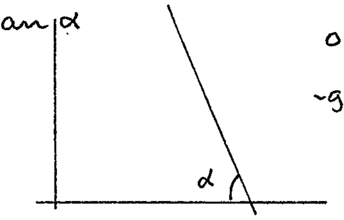
Eerste graadsfuncties.

Eerste graadsfuncties zijn functies van de vorm.

$$\boxed{y = mx + n \quad \text{of} \quad f(x) = mx + n}$$

m : richtingscoefficient = tan α





$0 < \alpha < 90° \rightarrow \tan\alpha > 0 \rightarrow r.c > 0$

$-90° < \alpha < 0 \rightarrow \tan\alpha < 0 \rightarrow r.c < 0$

Evenwijdige lijnen hebben dezelfde richtingscoefficient.

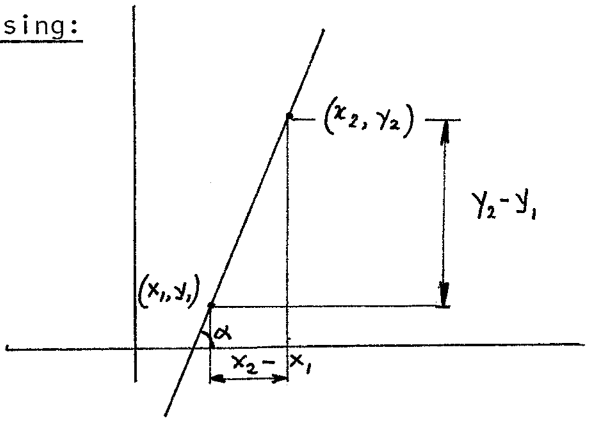
Voorbeeld 1: $y = 2x - 6$

Bepaal snijpunt X-as: $y = 0 \Rightarrow 2\cancel{x} - 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow S\ (0,3)$

Voorbeeld 2: Lijn door 2 punten

Lijn door (2,1) en (4,6)

1e oplossing:



$$r.c = \tan\alpha = \frac{y2 - y1}{x2 - x1} = \frac{6-1}{4-2} = \frac{5}{2}$$

$y = mx + n$

$Y = \frac{5}{2}x + n$

Lijn door (2,1): $1 = \frac{5}{2} . 2+n$

$1 = 5 + n$

$n = -4 \Rightarrow \boxed{y = \frac{5}{2}x - 4.}$

2e oplossing: $y = mx + n$

Door (2,1) : $1 = 2m + n$

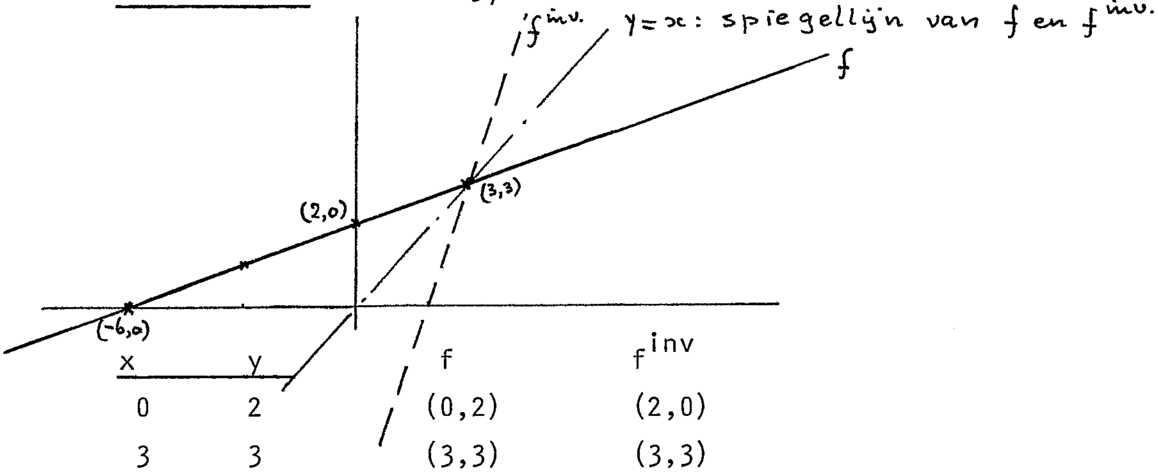
Door (4,6) : $6 = 4m + n$

$-5 = -2m$

$m = \frac{5}{2} \Rightarrow n = -4 \Rightarrow \boxed{y = \frac{5}{2}x - 4}$

De inverse van een eerste graadsfunctie.

Voorbeeld 1: $f : x - 3y + 6 = 0$



x	y	f	f^{inv}
0	2	(0,2)	(2,0)
3	3	(3,3)	(3,3)
-3	1	(-3,1)	(1,-3)
-6	0	(-6,0)	(0,-6)

f^{inv} rechtstreeks uit f te vinden door x en y te verwisselen.

$$f : x - 3y + 6 = 0$$

$$f^{inv} : y - 3x + 6 = 0$$

Voorbeeld 2: $f : y = 3$

$f^{inv} : x = 3$

Voorbeeld 3: $f : y = x$

$f^{inv} : x = y$

Voorbeeld 4: Van welk 1e graadsfuncties zijn f en f^{inv} hetzelfde ?

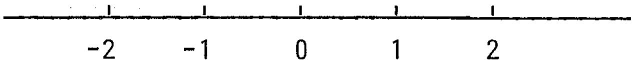
De functies waarvan de grafiek samenvalt met de lijn $y = x$ of loodrecht staat op de lijn $y = x$

Dit zijn: 1e $y = x$

2e $y = -x + b$

DE MODULUSFUNKTIE.

Onder de modulus of absolute waarde van een getal verstaan we, op de getallenlijn, de afstand van dat getal tot de oorsprong.



$/2/ = 2$ $/0/ = 0$ $/-1/ = 1$ $/-2/ = 2$

We zien dus:

$/2/ = 2$

$/-2/ = 2$ ofwel $/-2/ = -(-2)$.

Dus als $a \geqslant 0$ dan $/a/ = a$

Dus als $a \leqslant 0$ dan $/a/ = -a$

In het algemeen geldt dus: $/x/ = x$ als $x \geqslant 0$

$= -x$ als $x \leqslant 0$

Dus geldt: $/x-2/ = x-2$ als $x \geqslant 2$

$= -(x-2)$ als $x \leqslant 2$

: $/x^2-9/ = x^2-9$ als $x \geqslant 3$ v $x \leqslant -3$

$= -(x^2-9)$ als $-3 \leqslant x \leqslant 3$

Opmerking $\sqrt{x^2} = x$ als $x \geqslant 0$ $\sqrt{(3)^2} = 3$

$= -x$ als $x \leqslant 0$ $\sqrt{(-3)^2} = -(-3)$

Dus geldt: $\sqrt{x^2} = /x/$

Vergelijkingen en ongelijkheden.

I : $/ax+b/ = /cx+d/$. Algemeen $/a/ = /b/$

Als $/a/ = /b/$ dan geldt: $a = b$ v $a = -b$

Los x op uit: $/x-3/ = /2x-5/$

$/x-3/ = /2x-5/$

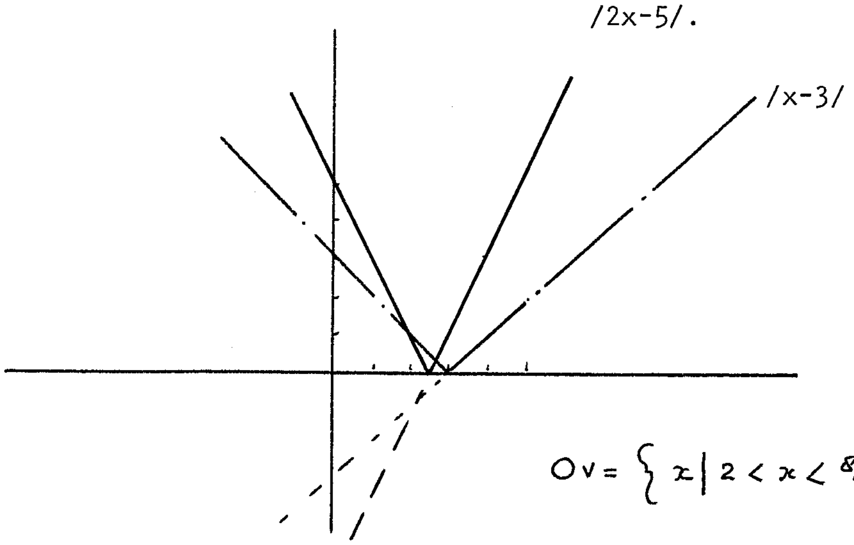
$x-3 = 2x-5 \Rightarrow x = 2$

$x-3 = -(2x-5) \Rightarrow x = +\ 8/3$

Voor welke x geldt: $/x-3/ > /2x-5/$

Werkvolgorde:

1. De gelijkheid oplossen
2. Teken de grafieken
3. Ongelijkheid uit de grafiek aflezen.



$Ov = \{ x \mid 2 < x < 8/3 \}$

Voor welke x geldt:

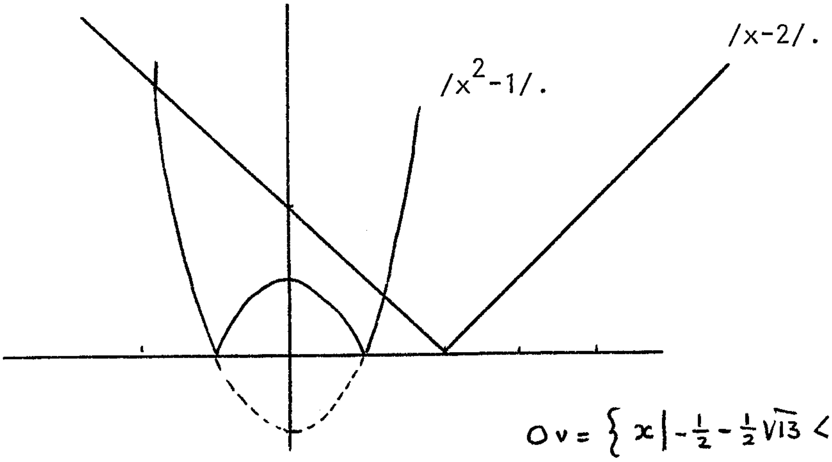
$/x-2/ > /x^2-1/.$

1e. $/x-2/ = /x^2-1/$

$x-2 = x^2-1 \Leftrightarrow x^2-x+1 = 0$ geen oplossing

$x-2 = -(x^2-1). \Leftrightarrow x^2+x-3 = 0$ $x = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13}$ v $x = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{13}$

2e.



$Ov = \{ x \mid -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{13} < x < -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13} \}$

II: $/ax+b/ = px+q.$

Als $/a/ = b$ geldt: $b \geqslant 0$

$a = b$ v $a = -b.$

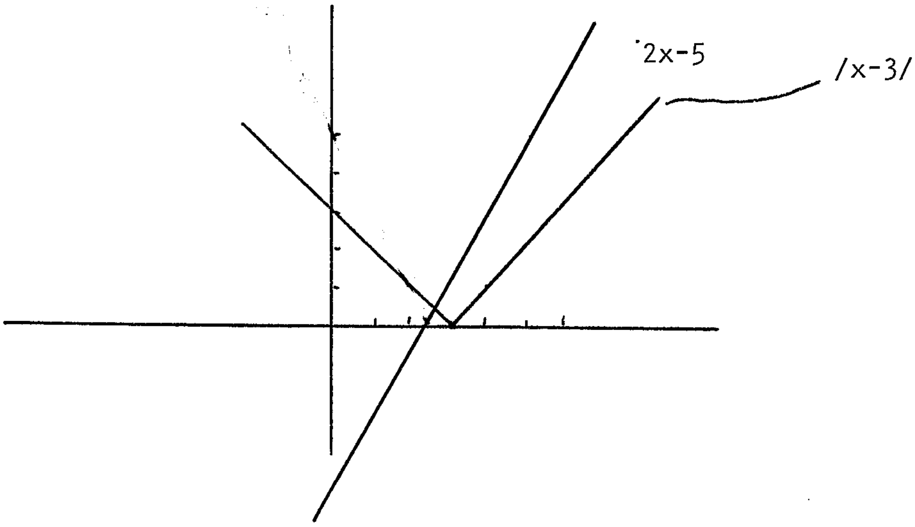
Los x op uit: $/x-3/ = 2x-5.$

Oplossing: $2x-5 \geqslant 0 \iff x > 2,5$

$x-3 = 2x-5$ $x = 2$ (vervalt).

$x-3 = -(2x-5)$ $x = 8/3$

Voor welke x geldt: $/x-3/ < 2x-5$



$/x-3/ < 2x-5$ voor $x > 8/3$

NIET

Exponentiële functie.

$f\ (x) = a^x$ met $a > 0 \wedge a \neq 1$

$a = 2 \quad f(x) = 2^x$ $\quad Df = \mathbb{R}$

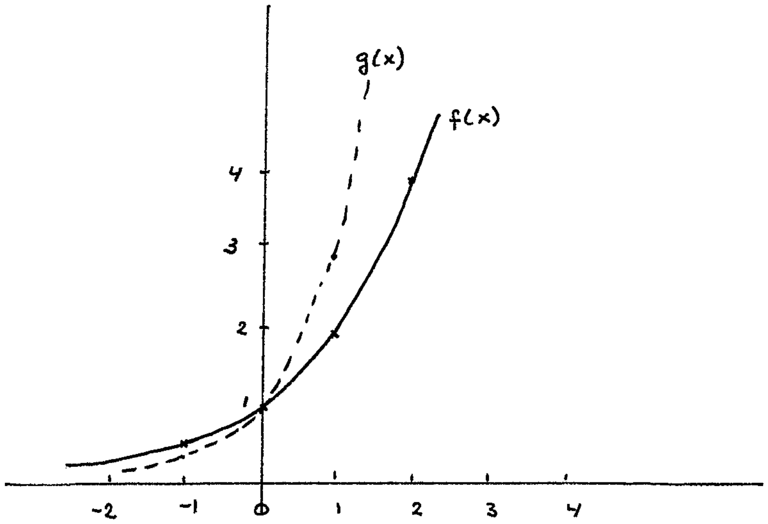
$Bf = \mathbb{R}^+$

$f\ (x) = 2^x$

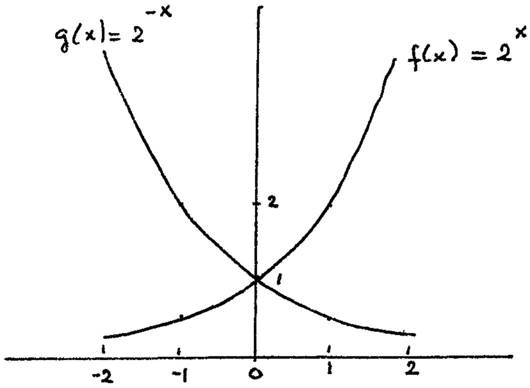
x	o	1	-1	-2
f(x)	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$g(x) = 3^x$

x	0	1	-1	-2
g(x)	1	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$



x	f(x)	g(x)
-2	$\frac{1}{4}$	4
-1	$\frac{1}{2}$	2
0	1	1
1	2	$\frac{1}{2}$
2	4	$\frac{1}{4}$



Als $a > 1$: grafiek van $f(x) = a^x$ is monotoon stijgend.

Als $0 < a < 1$: grafiek van $f(x) = a^x$ is monotoon dalend.

Verband tussen de grafieken:

De grafiek van a^x en a^{-x} zijn elkanders gespiegelde t.o.v. de y-as.

De grafiek van a^x en $(\frac{1}{a})^x$ zijn ook elkanders gespiegelde t.o.v. de y-as.

Logaritmische functies.

Eigenschappen logaritmen

$\log a b = \log a + \log b$

$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$

$\log a^{n} = n \log a$

$^{a}\log b = \dfrac{\log b}{\log a}$

$f\ (x) = a^{x} \qquad (a > 0 \wedge a \neq 1)$

$f : y = a^{x}$

$f^{inv} = x = a^{y}$

$\log x = \log a^{y}$

$\log x = y \log a$

$y = \dfrac{\log x}{\log a}$

$$\boxed{y = {}^{a}\log x}$$

Dus $\quad {}^{a}\log x = y \Leftrightarrow a^{y} = x$

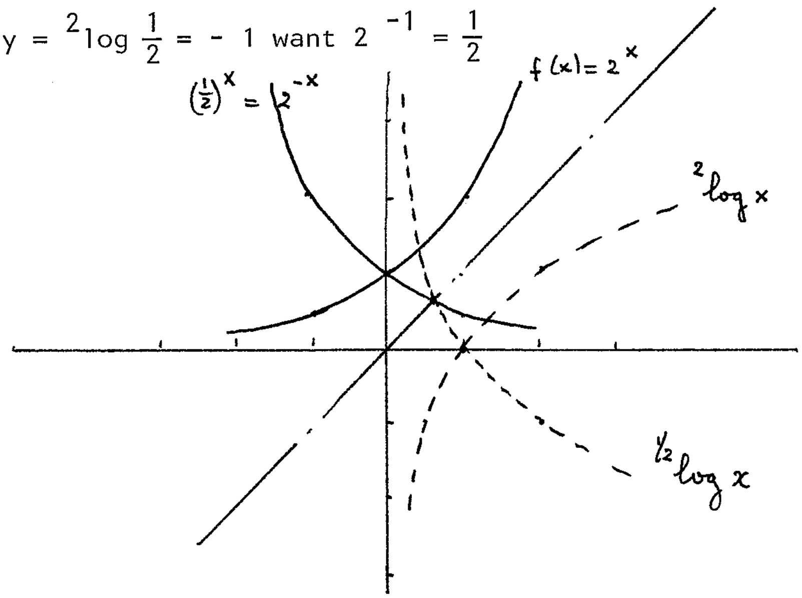
$f : y = {}^{2}\log x \qquad Bf = R$

$\qquad\qquad\qquad\quad Df = R+$

$y = {}^{2}\log 1 = 0$ want $2^{0} = 1$

$y = {}^{2}\log 2 = 1$ want $2^{1} = 2$

$y = {}^{2}\log \frac{1}{2} = -1$ want $2^{-1} = \frac{1}{2}$



$f(x) = a^{x}$: alle grafieken door (0,1) $\qquad f^{inv} = {}^{a}\log x$ allen door (1,0)

$f(x) = a^{x}$ en $f^{inv}(x) = {}^{a}\log x$: elkanders gespiegelde t.o.v. de lijn $y = x$

Exponentiële vergelijkingen.

Los x op uit:

1) $3^x = 9\sqrt{3}$ $\quad 3^x = 3^2 . 3^{\frac{1}{2}}$

$3^x = 3^{5/2} \implies x = 5/2$

2) $3^{x+2} = 5$

$\log 3^{x+2} = \log 5$

$(x+2) \log 3 = \log 5$

$x+2 = \frac{\log 5}{\log 3} = {}^3\log 5$

$x = {}^3\log 5 - 2 \qquad (x = \frac{\log 5}{\log 3} - 2 \approx \qquad)$

3) $4^{3x-1} = 9^{x+2}$

$\log 4^{3x-1} = \log 9^{x+2}$

$3x \log 4 - \log 4 = x \log 2 + 2 \log 9$

$x (3\log 4 - \log 2) = \log 4 + 2 \log 9$

$x = \frac{\log 4 + 2 \log 9}{3 \log 4 - \log 2} \approx$

4) $9^x - 3^x - 2 = 0 \qquad 9 = 3^2 \qquad 9^x = (3^2)^x = (3^x)^2$

Noem $y = 3^x$

$y^2 - y - 2 = 0$

$(y-2)(y+1) = 0$

$y = 2 \qquad 3^x = 2 \qquad x = \frac{\log 2}{\log 3} \approx$

$y = -1 \qquad 3^x = -1$: geen oplossing

Exponentiële ongelijkheden los je op door:

1) De gelijkheid op te lossen
2) De grafieken te schetsen
3) De oplossing van de ongelijkheid uit de grafiek af te lezen.

Logaritmische vergelijkingen.

Bij logaritmische vergelijkingen is het van belang eerst het domein op te sporen.

Lox x op uit:

1) $\log (x+2) = \log (2x-1)$.

Voorwaarde: $x+2 > 0 \wedge 2x-1 > 0$

$x > -2 \wedge x > \frac{1}{2} \Rightarrow x > \frac{1}{2}$.

Oplossing: $x+2 = 2x-1 \wedge x > \frac{1}{2}$

$-x = -3 \wedge x > \frac{1}{2}$

$x = 3$.

2) $\log (-x+1) + \log (2x-1) = \log 2$

Voorwaarde: $-x+1 > 0 \wedge 2x-1 > 0$

$-x > -1 \wedge 2x > 1$

$x < 1 \wedge x > \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} < x < 1$

Oplossing: $\log (-x+1)(2x-1) = \log 2 \quad \frac{1}{2} < x < 1$

$-2x^2+3x-1 = 2 \wedge \frac{1}{2} < x < 1$

$2x^2-3x+3 = 0 \wedge \frac{1}{2} < x < 1$

$Ov = \emptyset$.

3) ${}^2\log (x+2) = {}^4\log (x) \qquad {}^4\log x = \frac{\log x}{\log 4} = \frac{\log x}{2 \log 2}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\log x}{\log 2} = \frac{1}{2} \cdot {}^2\log x = {}^2\log \sqrt{x}$.

Voorwaarde: $x+2 > 0 \wedge x > 0$

$x > -2 \wedge x > 0$

$x > 0$

Oplossing: ${}^2\log(x+2) = {}^2\log \sqrt{x} \qquad x > 0$

$x+2 = \sqrt{x} \wedge x > 0$

$(x+2)^2 = x \wedge x > 0$

$x^2+4x+4 = x \wedge x > 0$

$x^2+3x+4 = 0 \wedge x > 0$

$Ov = \emptyset$

Logaritmische ongelijkheden los je op door:

1) De gelijkheid op te lossen
2) De grafiek te schetsen
3) De oplossing van de ongelijkheid uit de grafiek af te lezen.

Voorbeeld. $f(x) = {}^{2}\log(x-3)$

$Df = \{x \,/\, x > 3\}$

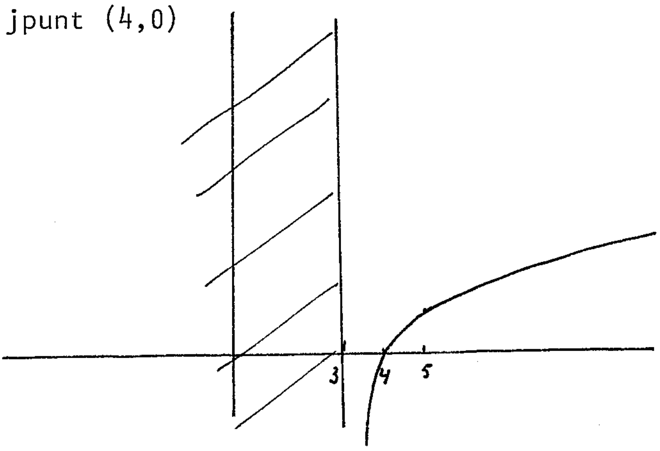
$Bf = R.$

Snijpunt x-as: ${}^{2}\log(x-3) = 0$

$x-3 = 1$

$x = 4$

Snijpunt (4,0)



Opmerking: $f(x) = a^{x}$ heeft een horizontaleasymptoot.

$f(x) = \log(ax + b)$ heeft een vertikale asymptoot.
Deze vind je door $ax + b = 0$ te stellen.

Wat is de inverse van $f : y = {}^{2}\log(x-3)$

$f^{inv} : x = {}^{2}\log(y-3)$

${}^{2}\log(y-3) = x \qquad 2^{x} = y - 3$

$y = 2^{x} + 3$

$f \quad : y = 2^{x} + 3$

$f^{inv} : x = 2^{y} + 3$

$x - 3 = 2^{y}$

$\log(x-3) = \log 2^{y}$

$\log(x-3) = y \log^{2}$

$y = \dfrac{\log(x-3)}{\log 2} \qquad y = {}^{2}\log(x-3)$

Ongelijkheden.

Exponentiële en logaritmische ongelijkheden hoef je alleen grafisch te kunnen oplossen. ($3^x \gtrless 3^{1-x}$)

Ongelijkheden van de vorm: $\dfrac{f\ (x)}{g\ (x)} \underset{\leqslant}{\geqslant} 0$ (f (x) en g(x) van hooguit de 2egraad

Voorbeeld 1: $\dfrac{x-3}{2x+8} \geqslant 0$

Teken overzicht teller: - - ı - - - - 0 ++++
3

Teken overzicht noemer: - - - - 0 + + + + + +
-4

Teken overzicht breuk: ++++ ? - - - - - - - - 0 + + + +
-4 3

$\dfrac{x-3}{2x+8} \geqslant 0$ voor: 1) $x \geqslant 3$ V $x < -4$

2) $[3, \rightarrow\rangle$ V $\langle\leftarrow, -4\rangle$

Voorbeeld 2: $\dfrac{x^2-x-2}{2x^2+x-6} < 0$

Teken overzicht teller: + + + + 0 - - - - 0 + + + + $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$
-1 2

Teken overzicht noemer: + + + 0 - - - - - 0 + + + + $2x^2+x-6= (2x-3)(x+2)$
-2 1,5

Teken overzicht breuk: + + + ? - - 0 + + + + + + ? - - 0 + + + +
-2 -1 1,5 2

$\dfrac{x^2-x-2}{2x^2+x-6} < 0$ voor: 0v $\{x/1{,}5 < x < 2 \text{ V } -2 < x < -1\}$

Voorbeeld 3: $\dfrac{x^2-x}{2x^2+3x+5} \geqslant 4$ (ongelijkheid op nul herleiden).

$\dfrac{x^2-x}{2x^2+3x+5} - 4 \geqslant 0$

$$\frac{x^2 - x}{2x^2 + 3x + 5} - \frac{4(2x^2 + 3x + 5)}{2x^2 + 3x + 5} \geqslant 0$$

$$\frac{x^2 - 8x^2 - x - 12x - 20}{2x^2 + 3x + 5} \geqslant 0 \Rightarrow \frac{-7x^2 - 13x - 20}{2x^2 + 3x + 5} \geqslant 0$$

Oplossing: volgens voorbeeld 1 en 2.

niet

Limieten.

Diverse schrijfwijze van functie:

1.) $f : \{ (x,y) \,/\, y = x^2 \}$
2.) $f : \; y = x^2$
3.) $f : \; f(x) = x^3$
4.) $f : x \rightarrow x^3$

$$f(x) = \frac{2x + 6}{x - 3}$$

als $x \rightarrow \infty$ dan nadert $f(x)$ tot 2

$$\frac{2x + 6}{x - 3} = 2 + \frac{12}{x-3}$$

$$x-3 \,/\, 2x + 6 \setminus 2$$
$$\frac{2x - 6}{12}$$

door x voldoende groot te kiezen kunnen we

$\frac{12}{x-3}$ zo klein maken als we willen.

Stel: $\frac{12}{x-3} < \varepsilon$ (ε is zéér klein)

$$\frac{x-3}{12} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$x-3 > \frac{12}{\varepsilon}$$

$$x > \frac{12}{\varepsilon} + 3$$

Stel ε: 0,00001

$$\frac{12}{x-3} < 0{,}00001$$

$$x > \frac{12}{0{,}00001} + 3$$

$$x > 1200.003$$

$$\frac{2x + 6}{x-3} = 2 + \frac{12}{x-3} > 2$$

Als $x \rightarrow \infty$ dan $f(x) \downarrow 2$
Als $x \rightarrow \infty$ dan $f(x) \rightarrow 2$

We schrijven:

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{2x+6}{x-3} = 2}$$

Als $x \to -\infty$ dan $f(x) \uparrow 2$.

Als $x \to -\infty$ dan $f(x) \to 2$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x+6}{x-3} = 2$$

Samenvatting:

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x+6}{x-3} = 2}$$

Hoe bereken je: $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

a) $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 3x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x^3} - \frac{2x}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{2 + \frac{3}{x}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

b) $$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}} = \boxed{1.}$$

Altijd delen door de hoogste macht van de noemer.

Limieten voor x → a.

Onder $x \to a$ verstaan we dat x zowel van de boven- als van de onderkant naar a kan naderen.

Onder $x \downarrow a$. Verstaan we dat x van de bovenkant tot a nadert.

Onder $x \uparrow a$. Verstaan we dat x van de onderkant tot a nadert.

$\lim\limits_{x \to 5}$: limiet.

$\lim\limits_{x \downarrow 5}$: rechter limiet (nader 5 van rechts)

$\lim\limits_{x \uparrow 5}$: linker limiet (nader 5 van links)

Voorbeeld 1: $f(x) = \frac{x+2}{x+6}$

$$f(5) = \frac{7}{11}$$

$$\lim_{x \to 5} f(x) = \frac{7}{11}$$

Voorbeeld 2: $f(x) = \frac{2x-10}{x+6}$

$$f(5) = \frac{0}{11} = 0$$

$$\lim_{x \to 5} f(x) = 0$$

Voorbeeld 3: $f(x) = \frac{3x-6}{x-5}$

$$f(5) = \frac{9}{0} = \underline{\underline{\text{bestaat niet}}}$$

wat wordt f(x) als x in de beurt van 5 wordt genomen.

$\underline{\underline{\text{wat is :}}}$ $\lim_{x \to 5} \frac{3x-6}{x-5}$

$x = 5{,}1$ $\quad f(5{,}1) = \frac{9{,}3}{0{,}1} = 93$

$x = 4{,}9$ $\quad f(4{,}9) = \frac{8{,}7}{-0{,}1} = -87$

$x = 5{,}01$ $\quad f(5{,}01) = \frac{9{,}03}{0{,}01} = 903$

$x = 4{,}99$ $\quad f(4{,}99) = \frac{8{,}07}{-901} = 807$

$$\lim_{x \to 5} \frac{3x-6}{x-5} = \underline{\underline{\text{bestaat niet}}}$$

Voorbeeld 4: $f(x) = \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 3x - 10}$

$$f(5) = \frac{25-40-15}{25-15-10} = \frac{0}{0} = \underline{\underline{\text{bestaat niet}}}$$

$\underline{\underline{\text{wat is:}}}$ $\lim_{x \to 5} f(x)$

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 3x - 10}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)\,(x-3)}{(x-5)\,(x+2)}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{x-3}{x+2} = \boxed{\frac{2}{7}}$$

Voorbeeld 5: $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 10x + 25}$ $f(5) = \frac{0}{0} =$ $\underline{\underline{\text{bestaat niet}}}$

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 10x + 25}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)\ (x-3)}{(x-5)\ (x-5)}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{x - 3}{x - 5} = \frac{2}{0} = \underline{\underline{\text{bestaat niet}}} \quad (\qquad\qquad)$$

Het oplossen van: $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

1e) $f(a) = c$ (constant getal) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ (Vb. 1)

2e) $f(a) = 0$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ (Vb. 2)

3e) $f(a) = \frac{c}{0}$ $\lim\limits_{x \to a} f(x)$: bestaat niet (Vb. 3)

4e) $f(a) = \frac{0}{0}$ $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a} f(x): \text{ bestaat } \underline{\text{wel}} \quad (\text{Vb. } 4) \\ \\ \lim\limits_{x \to a} f(x): \text{ bestaat } \underline{\text{niet}} \quad (\text{Vb. } 5) \end{array} \right.$

Goniometrische limieten.

Voorbeeld 1: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x}$ $\left(f(0) = \dfrac{\sin 0}{0}\right.$: bestaat niet)

als $x \to 0$ dan $3x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \lim_{3x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x}$$

$$= \lim_{p \to 0} \frac{\sin p}{p} = \text{①}$$

Voorbeeld 2: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{2x} \times \dfrac{2x}{x^2}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2}{x} \qquad \text{bestaat niet}$$

want $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{x}$ $\underline{\underline{\text{bestaat niet.}}}$

Voorbeeld 3: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x-3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2x}{x-3}$

$$\lim_{x \to 0} 1 \cdot 0 = \textcircled{0}$$

$$\frac{1}{\sin^2 2x}$$

Voorbeeld 4: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan^3 3x}{x \sin^2 2x} \quad \lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{3x} \cdot \frac{\tan 3x}{3x} \cdot \frac{\tan 3x}{3x} \cdot 27x^3 \cdot \frac{1}{x} \cdot$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{3x} \cdot \frac{\tan 3x}{3x} \cdot \frac{\tan 3x}{3x} \cdot 27x^3 \cdot \frac{1}{x} \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot$$

$$\frac{1}{4x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{3x} \cdot \frac{\tan 3x}{3x} \cdot \frac{\tan 3x}{3x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \frac{27x^3}{4x^3}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{27}{4} = \boxed{\frac{27}{4.}}$$

Voorbeelden.
============

1) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x-3}{x-2} = \left(\frac{-1}{0}\right)$ bestaat niet.

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^4 + x^2}{x^3 - x^2} = \lim\limits_{x \to 0} = \frac{x\,(2x^3 + x)}{x\,(x^2 - x)}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^3 + x}{x^2 - x} = \lim\limits_{x \to 0} = \frac{x\,(2x^2 + 1)}{x\,(x - 1)}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^2 + 1}{x - 1} = -1$ (na invullen van $x = 0$)

3) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{10 - x} - 3}{3 - x}$: bestaat niet.

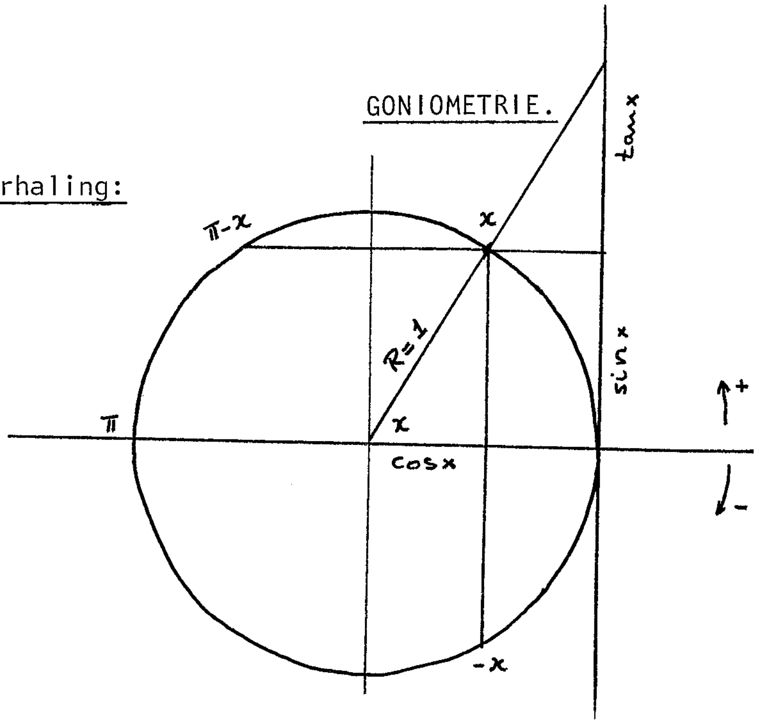
4) $$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x + 9} - \sqrt{9 - x}} = \frac{x\ (\sqrt{x + 9} + \sqrt{9 - x})}{(\sqrt{x + 9} - \sqrt{9 - x})\ (\sqrt{x + 9^{15}} + \sqrt{9 - x})}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\ (\sqrt{x + 9} + \sqrt{9 - x})}{(x + 9) - (9 - x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x\ (\sqrt{x + 9} + \sqrt{9 - x})}{2x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + 9} + \sqrt{9 - x}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

GONIOMETRIE.

Herhaling:



Uit deze eenheidscirkel is af te leiden dat:

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin x = \sin(x+k.2\pi)$: sinus heeft een periode van 2π rad.
$\cos x = \cos(x+k.2\pi)$ cosinus " " " " 2π rad.
$\tan x = \tan(x+k.\pi)$ tangens " " " " π rad.

$\sin(\pi-x) = \sin x$
$\cos(\pi-x) = \cos x$
$\tan(\pi-x) = -\tan x$

$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(-x) = \cos x$
$\tan(-x) = -\tan x.$

Som en verschilformules.

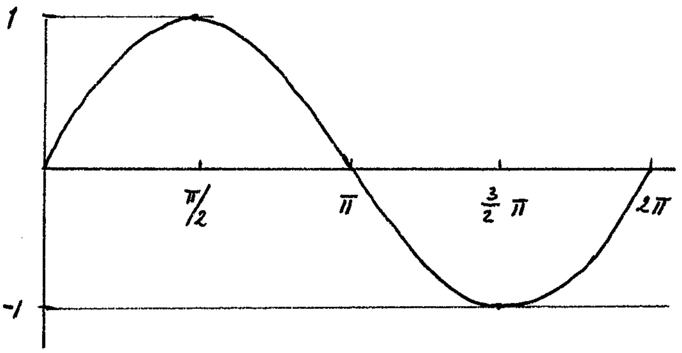
$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)$
$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{1}{2}(p-q)\cos\frac{1}{2}(p+q).$

$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q).$
$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{1}{2}(p+q)\sin\frac{1}{2}(p-q).$

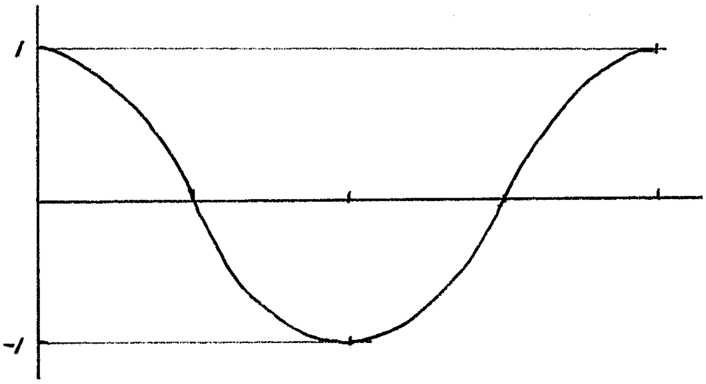
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$

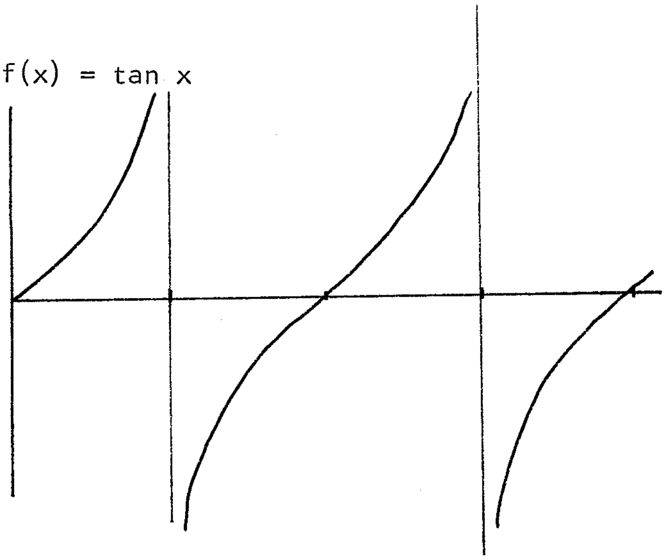
f(x) = sin x



f(x) = cos x



f(x) = tan x



$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ is

niet gedefinieerd als

$\cos x = 0$.

Dit geldt voor

$x = 90^\circ + k.\ 180^\circ$ ($\pi/_2 + k\,\pi$).

Onder periode verstaan we "het gebied" waarover de grafiek zich precies één keer herhaalt.

Periode sin x is 2 π rad. of 360°

Periode cos x is 2 π rad. of 360°

Periode tan x is π rad. of 180°

Vergelijkingen.

I. $\sin\alpha = c$

Als $\alpha = x^\circ$ voldoet, voldoet eveneens 180-x want sin (180-x) = sin x.

Oplossing: $\alpha = x^\circ + k.360$ (periode 360°)
$\alpha = 180-x + k.360.$

Voorbeeld: $\sin(2x-30) = \frac{1}{2}$
$2x-30 = 30 + k.360$ $x = 30^\circ + k.180$
$2x-30 = 150 + k.360$ $x = 90 + k.180$

$\cos\alpha = c$

Oplossing: $\alpha = x^\circ + k.360$ (periode 360°)
$\alpha = -x^\circ + k.360^\circ$

Voorbeeld: $\cos\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{1}{2}x = 45^\circ + k.360$ $x = 90^\circ + k.720$
$\frac{1}{2}x = -45^\circ + k.360$ $x = -90^\circ + k.720$

$\tan\alpha = c$

Oplossing: $\alpha = x^\circ + k.180^\circ$ (periode 180°).

Voorbeeld: $\tan 3x = 1$ met $o \leq \alpha \leq 360^\circ$
$3x = 45^\circ + k.180$
$x = 15^\circ + k.60^\circ$

De juiste waarden zijn nu: 15°; 75°; 135°; 195°; 255°; 315°
(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5).

II $\sin\alpha = \sin\beta$

Oplossing $\begin{cases} \alpha = \beta + k.360^\circ \\ \alpha = 180 - \beta + k.360^\circ \end{cases}$

Voorbeeld: $\sin x = \sin 2x - 60^\circ$

$$\begin{cases} x = 2x - 60 + k.360 \\ x = 180 - (2x - 60) + k.360 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x = -60 + k.360 \\ 3x = 240 + k.360 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 60^\circ + k.360^\circ \\ x = 80^\circ + k.120^\circ \end{cases}$$

$\cos\alpha = \cos\beta$

Oplossing: $\begin{cases} \alpha = \beta + k.360 \\ \alpha = -\beta + k.360 \end{cases}$

Voorbeeld: $\cos \frac{1}{2}x = \cos (x - 10^\circ)$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x = x - 10^\circ + k.360 \\ \frac{1}{2}x = -(x - 10^\circ) + k.360 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x = -10^\circ + k.360 \\ \frac{3}{2}x = 10^\circ + k.360^\circ \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 20^\circ + k.720^\circ \\ x = \frac{20^\circ}{3} + k.240^\circ \end{cases}$$

$\tan\alpha = \tan\beta$

Oplossing: $\alpha = \beta + k.180^\circ$

Voorbeeld: $\tan(-x) = \tan 2x$

$$-x = 2x + k.180^\circ$$

$$-3x = k.180 \qquad x = k.60^\circ$$

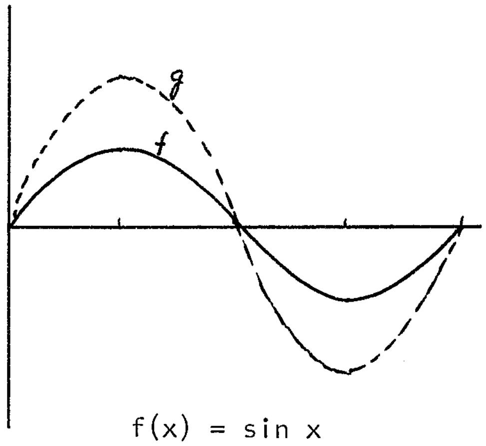
Grafieken.

Hetgeen voor de sinus geldt, geldt eveneens voor cos en tangens met dit verschil dat de tangens een periode van 180° heeft:

$f(x) = \sin x$

$g(x) = 2 \sin x$

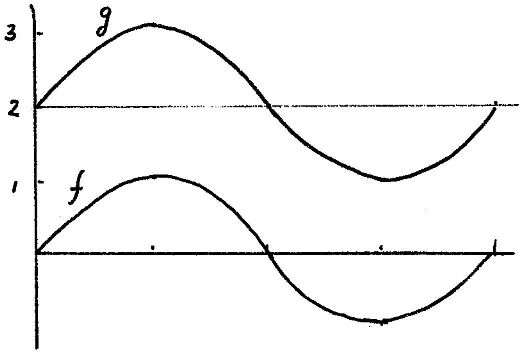
Daar $g(x) = 2\, f(x)$ worden de funktiewaarden dus steeds 2 maal zo groot.



$f(x) = \sin x$

$g(x) = 2 + \sin x$.

Daar $g(x) = 2 + f(x)$ ontstaat de grafiek van $g(x)$ door die van $f(x)$ over 2 eenheden naar boven te schuiven.



$f(x) = \sin x$

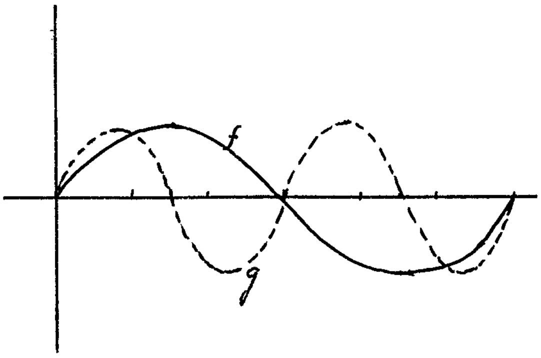
$g(x) = \sin 2x$.

Stel $2x = y$ dan $g(y) = \sin y$.

Omdat de sinus een periode heeft van 360° zal, als we y over 360° variëren de kromme precies één maal voorkomen. Daar $2x = y$ zal x dus slechts over $\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$ hoeven te variëren. De periode is dus $\frac{360}{2} = 180^\circ$.

Algemeen:

$g(x) = \sin ax$ heeft een periode van $\frac{360^\circ}{a}$



$f(x) = \sin x$

$g(x) = \sin(x - 30^\circ) = \sin(x - \frac{\pi}{6})$

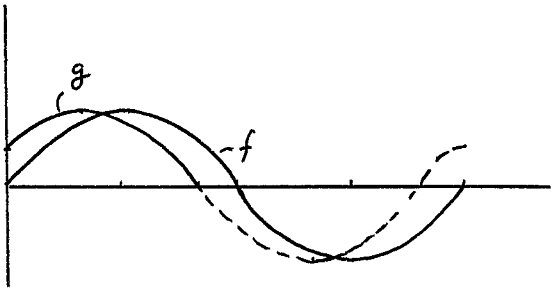
De grafiek van $g(x)$ ontstaat uit die van $f(x)$ door de grafiek van f over 30° naar rechts te schuiven.

Algemeen:

$g(x) = \sin(x + a^\circ)$

a positief → over a° naar links

a negatief → over a° naar rechts.



Algemeen: $f(x) = a \sin(bx + c) + d$.

Periode: $\frac{360^\circ}{b}$

Horizontale verschuiving: over $\frac{c}{b}$ naar links of rechts.

Amplitude: deze bedraagt a

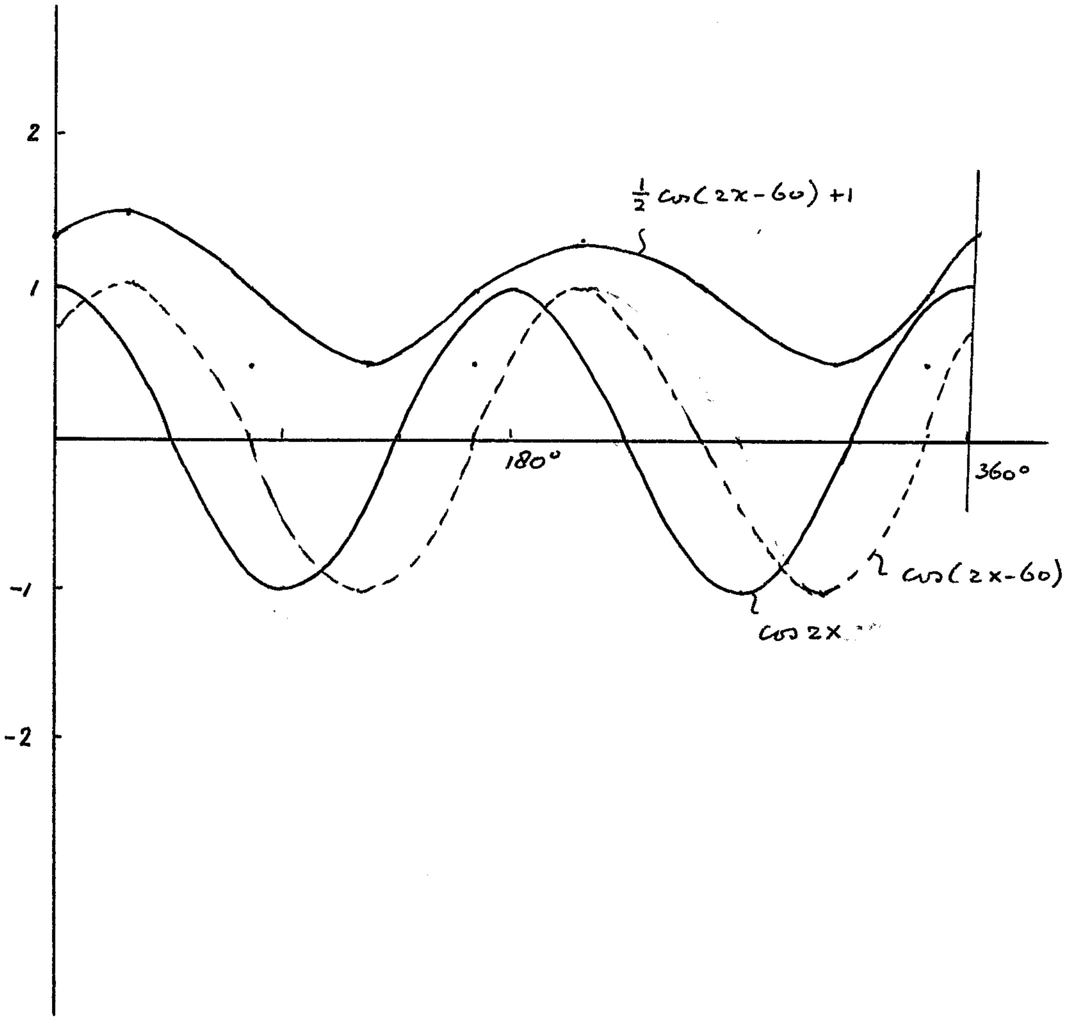
Vertikale verschuiving: over d naar boven of beneden.

Voorbeeld: $f(x) = \frac{1}{2} \cos (2x - 60^{o}) + 1$.

Periode: $\frac{360^{o}}{2} = 180^{o}$.

Horizontale verschuiving: $\frac{60^{o}}{2} = 30^{o}$ naar rechts.

$f(o) = \frac{1}{2} \cos (o - 60^{o}) = \frac{1}{2}. \cos 60 = \frac{1}{2} . \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

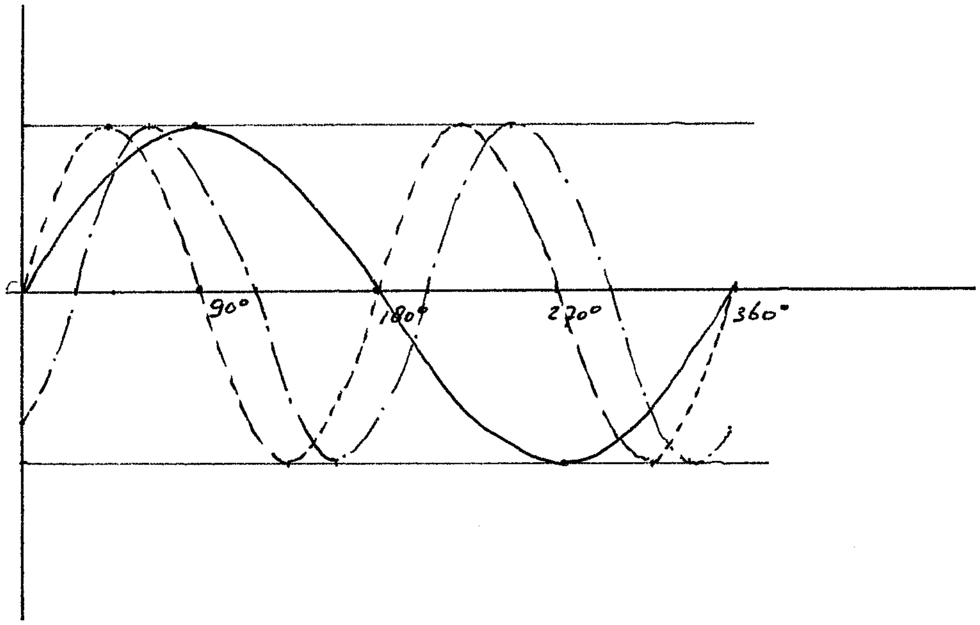


Grafieken van goniometrische funkties.

Gegeven $f(x) = \sin x$
$g(x) = \sin 2x$
$h(x) = \sin (2x - 60^\circ)$.

Bereken de snijpunten met de x-as.
Teken de grafieken

$f(x) = \sin x = 0 \Rightarrow x = k.\ 180^\circ$
$g(x) = \sin 2x = 0 \quad 2\,x = k.\ 180^\circ \Rightarrow x = k.\ 90^\circ$
$h(x) = \sin (2x - 60^\circ) = 0 \quad 2x - 60^\circ = k.180^\circ \Rightarrow x = 30^\circ + k.\ 90^\circ$.



In het algemeen geldt dat als gegeven is dat:

$f(x) = \sin (a\,x + b) + c$ dat:
de faktor a de periode verkleint tot $\frac{360^\circ}{a}$ (frequentie).

de faktor b de grafiek verschuift naar links of rechts
n.l. als b positief is: $\frac{b^\circ}{a}$ naar links
als b negatief is: $\frac{b^\circ}{a}$ naar rechts

de faktor c de grafiek in vertikale richting verschuift.