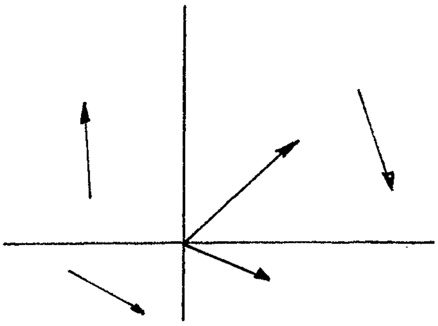
## VEKTOREN 1.

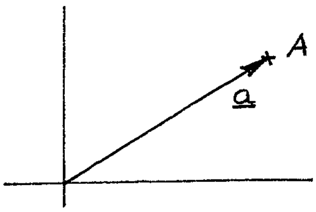
Een vektor is een lijnstuk met een beginpunt en een eindpunt.



gebonden vektor begint in 0

vrije vektor begint niet in de oorsprong.

We rekenen alleen met gebonden vektoren !




Elke vektor eindigt precies in één punt.

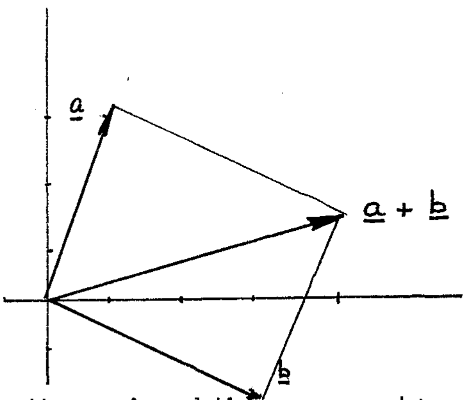
Bij elk punt behoort precies een vektor.

$\underline{a}$ = de plaats vektor van punt $A$ .

Heeft $A$ de coördinaten $(a_1, a_2)$ dan is de vektor $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$a_1$ en $a_2$ zijn de kentallen van de vektor $\bar{a}$

### Optellen van vektoren.



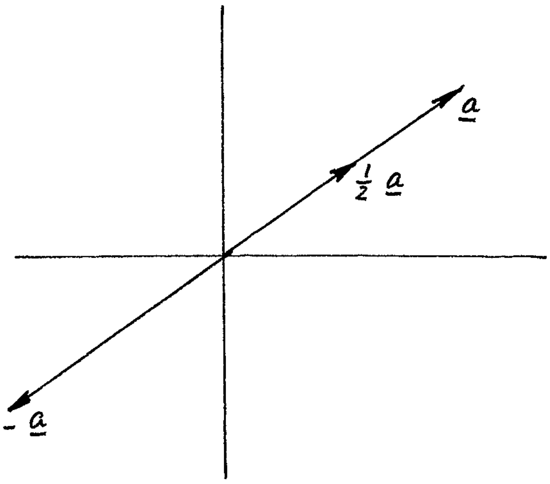

$\bar{a} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\bar{b} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Bij het optellen van vektoren moet je de kentallen optellen.

$\bar{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

### Vermenigvuldigen van vektoren met een scalar (getal).




$\underline{x} = \lambda \bar{a}$

$\lambda \bar{a}$ is de vektor die $\lambda$ maal zo groot is als $\bar{a}$ en voor:

$\lambda > 0$: dezelfde richting heeft als $\bar{a}$

$\lambda < 0$: tegengesteld gericht is aan $\bar{a}$

$0.\bar{a} = \bar{o}$

$-1.\bar{a} = -\bar{a}$

$\frac{1}{2}.\bar{a} = \frac{1}{2}\bar{a}$

Van deze 2 basisbewerkingen is het aftrekken van vektoren afgeleid.

Voorbeeld. Gegeven: $\bar{a}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ en $\bar{b}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

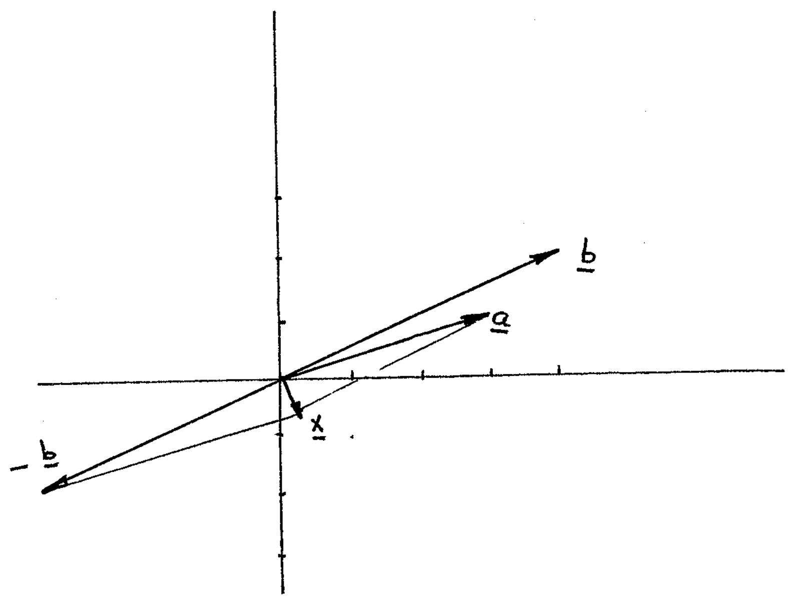
Gevraagd: teken en bereken: $\bar{x} = \bar{a} - \bar{b}$

Oplossing: $\bar{x} = \bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$

$\bar{x} = \bar{a} - \bar{b}$

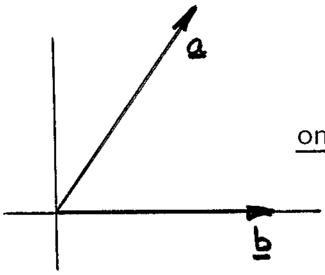
$\bar{x} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$

$\bar{x} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

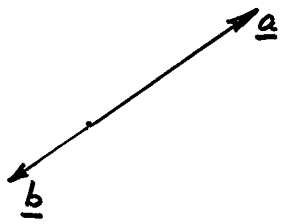


## Afhankelijkheid en onafhankelijkheid in $R_2$

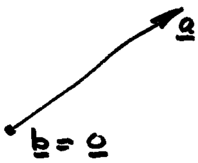
Twee vektoren (ongelijk aan nul) heten onafhankelijk, als ze verschillende dragers hebben.



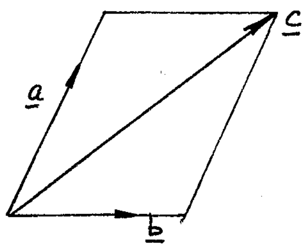

onafhankelijk




afhankelijk




afhankelijk




$\bar{c} = \lambda.\bar{a} + \mu.\bar{b} \quad (\lambda, \mu \in R)$

$\lambda$ en $\mu$ : heten de kentallen van $\bar{c}$ t.o.v. $(\bar{a}, \bar{b})$; door $\lambda$ en $\mu$ te variëren kun je ieder punt in het vlak, opgespannen door $\bar{a}$ en $\bar{b}$ , bereiken. De 2 vektoren $\bar{a}$ en $\bar{b}$ noemt men de basis van het vlak.

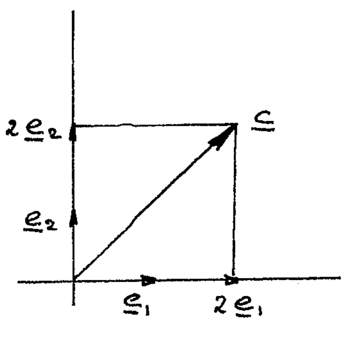
$\lambda$ en $\mu$ : kentallen van $\bar{c}$ t.o.v. basis $(\bar{a}, \bar{b})$

$\lambda$ en $\mu$ : coördinaten van C " " "

Een orthonarmale basis $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ is een basis, waarbij

1e $\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$

2e Lengte van de vektor $\bar{e}_1$ = lengte vektor $\bar{e}_2 = 1 \Rightarrow |\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = 1$.




$\bar{c} = 2\, e_1 + 2 \cdot e_2$

$\bar{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\bar{e}_1 = 1.\bar{e}_1 + 0.\bar{e}_2 \qquad \bar{e}_1 = \binom{1}{0}$

$\bar{e}_2 = 0.\bar{e}_1 + 1.\bar{e}_2 \qquad \bar{e}_2 = \binom{0}{1}$

( **Algemene definitie:**
( Twee vektoren $\bar{a}$ en $\bar{b}$ $(\neq 0)$ heten onafhankelijk als
( $\lambda\ \bar{a} + \mu \bar{b} = \bar{0}$ alleen als $\lambda$ en $\mu$ gelijk zijn aan nul $(\lambda = \mu = 0)$

**Voorbeeld:** $\bar{a}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ $\bar{b}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$

Is dit stelsel afhankelijk ?

**Stel:** $\lambda\ \underline{a} + \mu\ \underline{b} = \underline{o}$

$$\lambda\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix} = \underline{o}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda\\3\lambda\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\mu\\-4\mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda + 6\mu\\3\lambda - 4\mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\lambda + 6\mu = 0\\3\lambda - 4\mu = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}3\lambda + 18\mu = 0\\3\lambda - 4\mu = 0\end{cases}\ -$$

$$22\mu = 0 \longrightarrow \mu = 0 \wedge \lambda = 0$$

$(\bar{a}\ \bar{b})$ is een onafhankelijk stelsel.

**Voorbeeld:** $\bar{a} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ $\bar{b} = \begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$

Is dit stelsel afhankelijk en toon het aan.

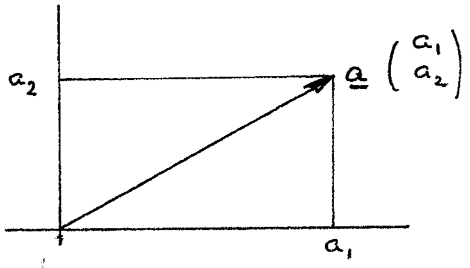
**Stel:** $\lambda\ \underline{a} + \mu\ \underline{b} = \underline{o}$

$$\lambda\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-\lambda + -3\mu = 0\\2\lambda + 6\mu = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}2\lambda + 6\mu = 0\\2\lambda + 6\mu = 0\end{cases} \qquad 2\lambda + 6\mu = 0$$

Kies $\mu = 1$ en $\lambda = -3$ $\Longrightarrow$ stelsel afhankelijk.

## De lengte van de vektor:

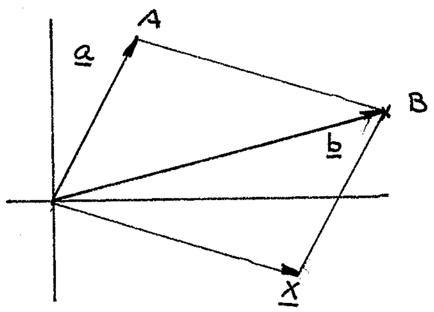



De lengte van de vektor $\underset{=}{a}$ :

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}$$

I.p.v. lengte van een vektor spreekt men ook wel eens van de norm.

## Afstand tussen twee punten A en B.




$$\bar{x} + \bar{c} = \bar{b}$$

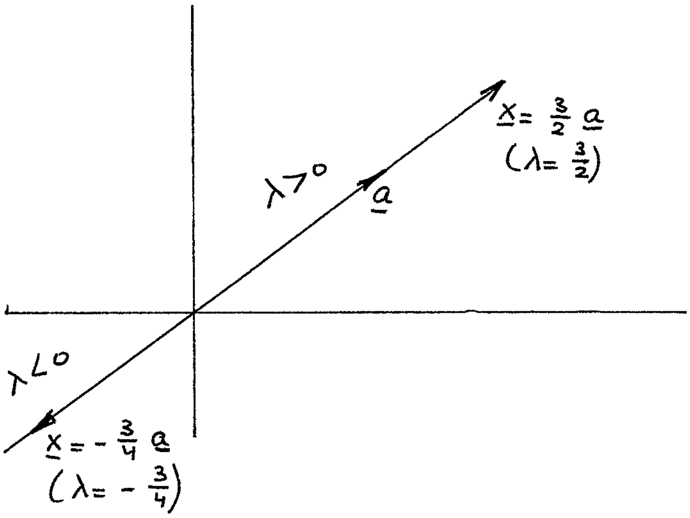
$$\bar{x} = \bar{b} - \bar{a}$$

$$|AB| = |\bar{b} - \bar{a}| = |\bar{a} - \bar{b}|$$

$$|\bar{b} - \bar{a}| = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 + a_2)^2} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

## Vektorvoorstelling van een lijn door de oorsprong.




$\bar{x} = \lambda \bar{a} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

| | |
|---|---|
| $\lambda = -1$ | $\bar{x} = -\bar{a}$ |
| $\lambda = 0$ | $\bar{x} = \bar{o}$ |
| $\lambda = \frac{3}{2}$ | $\bar{x} = \frac{3}{2}\bar{a}$ |

$\bar{x} = \lambda . \bar{a}$ is een verzameling van vektoren met de eigenschap dat de eindpunten van die vektoren op een lijn liggen (l gaat door 0)
$\bar{x} = \lambda \bar{a}$ heet een vektorvoorstelling van l.

$\bar{a}$ geeft de richting (ri) van l aan: $\bar{a}$ is de richtingsvektor.

Elk veelvoud van $\bar{a}$ is als ri-vektor te gebruiken.

Voorbeeld: $\left.\begin{array}{l} l : \bar{x} = \lambda \binom{1}{3} \\ \\ l : \bar{x} = \mu \binom{-2}{6} \end{array}\right)$ idem

Ligt (3, 17) op l. ?

Controle: $\binom{3}{17} = \lambda \binom{1}{3}$

$$\left.\begin{array}{l} 3 = \lambda \Rightarrow \lambda = 3 \\ 17 = 3\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{17}{3} \end{array}\right) \Rightarrow \text{(3,17) ligt niet op l.}$$

## Twee lijnen in het platte vlak kunnen:

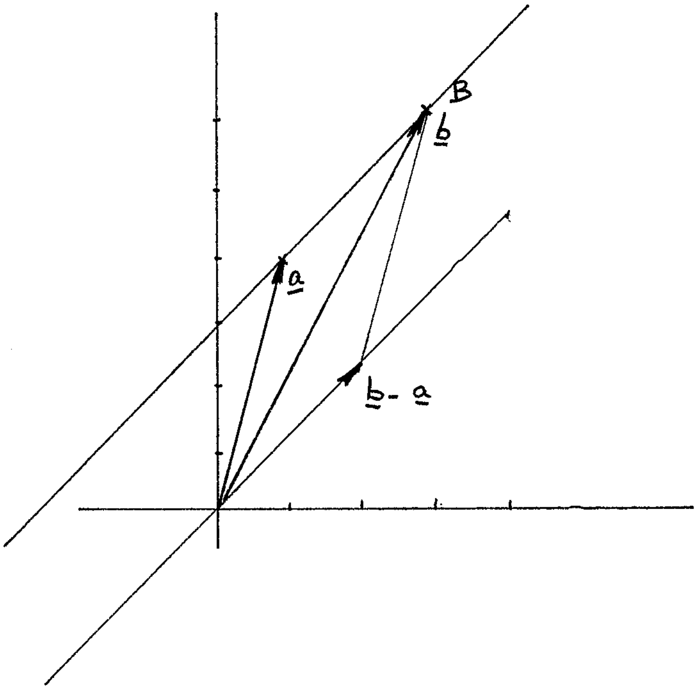
1) Evenwijdig lopen (of ~~s~~amenvallen).
2) Elkaar ~~s~~nijden.

ad 1: Dit is als de ri-vektoren van elkanders lijnen veelvoud zijn.
ad 2: Dit is als de ri-vektoren niet elkanders veelvoud zijn.

## Lijn door twee punten.

Gegeven: A (1,4)     B (3,6)

Gevraagd: vektorvoorstelling van AB.




$$\underline{x} + \underline{a} = \underline{b}$$

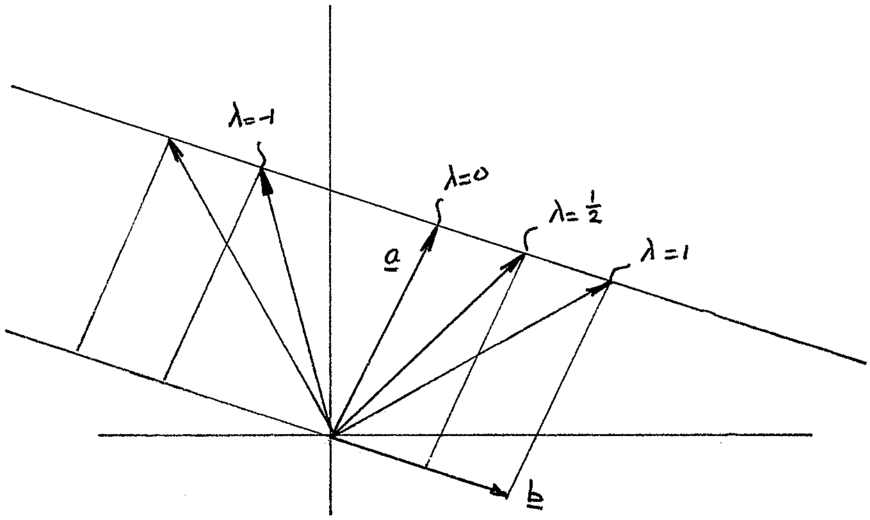
$$\underline{x} = \underline{b} - \underline{a}$$

AB : $\boxed{\underline{x} = \underline{a} + \quad (\underline{b} - \underline{a})}$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Vektorvoorstelling van een lijn niet door de oorsprong.




$$\bar{x} = \bar{a} + \lambda\, \bar{b} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$\lambda = 1$ $\qquad \bar{x} = \bar{a} + \bar{b}$

$\lambda = \frac{1}{2}$ $\qquad \bar{x} = \bar{a} + \frac{1}{2}\, \bar{b}$

$\lambda = 0$ $\qquad \bar{x} = \bar{a} + 0\, \bar{b} = \bar{a}$

$\lambda = -\,1\frac{1}{2}$ $\qquad \bar{x} = \bar{a} - \frac{3}{2}\, \bar{b} = \bar{a} \quad (-\,\frac{3}{2}b)$

Alle eindpunten van de vektoren liggen op één lijn (niet door 0).
$\bar{b}$ is de ri-vektor (b // l)
$\bar{a}$ is de plaatsvektor of steunvektor.
Je kunt iedere vektor die zijn eindpunt op l heeft liggen als plaatsvektor nemen (nooit het veelvoud van de plaatsvektor).

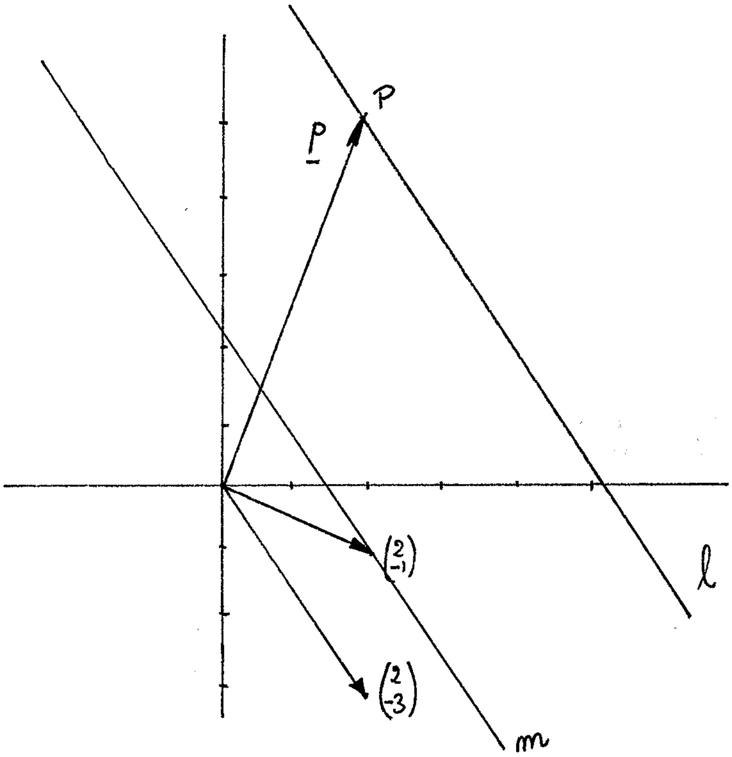
Voorbeeld:

$$l : \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$l : \bar{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

## Lijn door gegeven punt evenwijdig aan gegeven lijn.

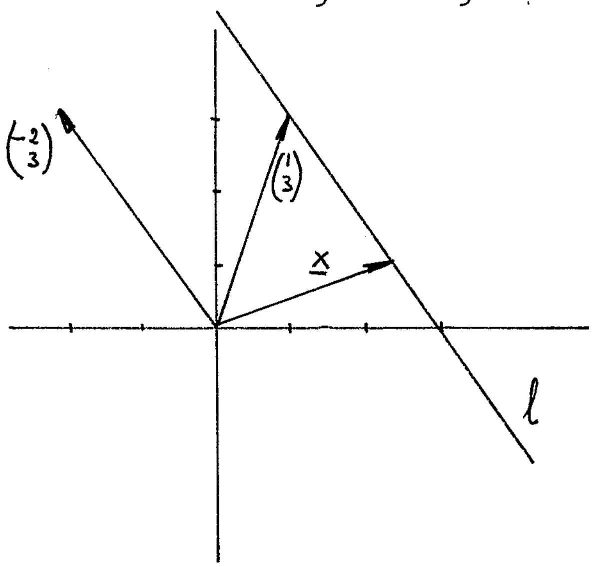
Voorbeeld: Bepaal vektorvoorstelling van lijn l die door P (2,5) gaat en // aan de lijn m : $\underline{x} = \binom{2}{-1} + \lambda \binom{2}{-3}$ loopt.




$l : \underline{x} = \binom{2}{5} + \mu \binom{2}{-3}$

## Omzetten van een vektorvoorstelling in een vergelijking en omgekeerd.

Voorbeeld 1: $l : \underline{x} = \binom{1}{3} + \lambda \binom{-2}{3}$




De vektor $\underline{x}$ heeft als kentallen $\binom{x}{y}$

1e manier:
$$\underline{x} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\lambda\\3\lambda\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 1-2\lambda \\ y = 3+3\lambda \end{cases}$$ (parametervoorstelling)

$$\begin{array}{l|l|} x = 1-2\lambda & 3\times \\ y = 3+3\lambda & 2\times \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3x = 3-6\lambda \\ 2y = 6+6\lambda \\ \hline 3x+2y = 9 \end{array} + \qquad y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$$

2e manier: r.c van l = r.c van ri-vektor

r.c ri-vektor $= \frac{3}{-2} \Rightarrow$ l : $y = -\frac{3}{2}x + c$

$(1,3) \in$ l : $3 = -\frac{3}{2} + c \Rightarrow c = \frac{9}{2}$

$$\underline{y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}}$$

Voorbeeld 2: Gegeven: l : $2x - y = 4$.

Gevraagd: Bepaal de vektorvoorstelling.

1e manier: Stel $x = \lambda$ $\qquad 2\lambda - y = 4$

$y = 2\lambda - 4$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\2\lambda-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+\lambda\\-4+2\lambda\end{pmatrix}$$

$$\underline{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}$$

2e manier: $\qquad 2x - y = 4$

$y = 2x - 4$

als $x = 0$ dan: $y = -4$ $\qquad (0,4) \in l$

$\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$ is een plaatsvektor.

r.c. = 2 $\qquad$ Kies als richtingsvektor $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

l : $\underline{x = \begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}$

## Berekening van het snijpunt van twee lijnen.

Voorbeeld 1: $l : \underline{x} = \binom{1}{0} + \lambda \binom{2}{-1}$ $\qquad m: \underline{x} = \binom{2}{1} + \mu \binom{3}{2}$

Bepaal: $l \cap m$.

$$\binom{1}{0} + \lambda\binom{2}{-1} = \binom{2}{1} + \mu\binom{3}{2}$$

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda = 2 + 3\mu \\ 0 - \lambda = 1 + 2\mu \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl|c|rl} 2\lambda - 3\mu = 1 & & 1 & 2\lambda - 3\mu = 1 & \\ -\lambda - 2\mu = 1 & & 2 & -2\lambda - 4\mu = 2 & + \\ \hline & & & -7\mu = 3 & \end{array}$$

$$\mu = -\frac{3}{7} \rightarrow \lambda = -\frac{1}{7}$$

$\mu$ invullen:

$$\underline{x} = \binom{2}{1} + \mu\binom{3}{2}$$
$$\underline{x} = \binom{2}{1} - \frac{3}{7}\binom{3}{2}$$
$$\underline{x} = \binom{5/7}{1/7}$$

$S = (5/7,\ 1/7)$

$\lambda$ invullen:

$$\underline{x} = \binom{1}{0} + \lambda\binom{2}{-1}$$
$$\underline{x} = \binom{1}{0} - \frac{1}{7}\binom{2}{-1}$$
$$\underline{x} = \binom{5/7}{1/7}$$

$S = (5/7,\ 1/7)$

Voorbeeld 2: $l : \underline{x} = \binom{1}{-3} + \lambda\binom{2}{3}$

$m : \underline{x} = \binom{3}{-6} + \mu\binom{-4}{6}$

$\binom{-4}{6} = -2\binom{2}{-3}$ $\qquad l//m$ 0f $l$ op $m$.

**$l$ op $m$ als één punt van $l$ op $m$ ligt:**

$\binom{1}{-3} \in l$. ligt nu $(1,-3)$ ook op $m$ ?

$\binom{1}{-3} = \binom{3}{-6} + \mu\binom{-4}{6}$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = 3 - 1\mu \\ -3 = -6 + 6\mu \end{array}\right\} \mu = \tfrac{1}{2} \text{ voldoet.}$$

$(1,-3) \in l$ en $\in m \Rightarrow$

$l$ op $m$.

- Aan de vergelijkingen van de lijnen kun je direkt zien of ze evenwijdig lopen of samenvallen.

  Je moet de vergelijking dan schrijven in de vorm

$$\boxed{y = ax + b}$$

<u>Voorbeeld 1:</u> $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = \frac{1}{3}x - 2 \end{cases}$ lijnen <u>snijden</u> elkaar want <u>ri-coëff. verschillend.</u>

<u>Voorbeeld 2:</u> $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$ lijnen <u>lopen</u> <u>evenwijdig</u>, want <u>ri-coëff. hetzelfde</u> en <u>constante</u> <u>verschillend.</u> (Strijdig)

<u>Voorbeeld 3:</u> $\begin{cases} y = x - 4 \\ 2y = 2x - 8 \end{cases}$ lijnen <u>vallen</u> <u>samen.</u>

<u>Voorbeeld 4:</u> T.o.v. een basis $(\underline{a}\ ,\ \underline{b})$ zijn gegeven de lijnen

$$l : \underline{x} = \underline{a} + \lambda(2\underline{a} - \underline{b})$$
$$m : \underline{x} = \underline{b} + \mu(\underline{a} + \underline{b})$$

Bereken de plaatsvektor van het snijpunt !

<u>Voor het snijount S geldt:</u>

$$\underline{a} + \lambda(2\underline{a} - \underline{b}) = \underline{b} + \mu(\underline{a} + \underline{b})$$
$$\underline{a} + 2\lambda\underline{a} - \lambda\underline{b} = \underline{b} + \mu\underline{a} + \mu\underline{b}$$
$$\underline{a}\,(1 + 2\lambda - \mu) + \underline{b}\,(-\lambda - 1 - \mu) = \underline{0}$$
$$(2\lambda + 1 - \mu)\,\underline{a} + (-\lambda - 1 - \mu)\,\underline{b} = \underline{0}$$

$(\underline{a}\ ,\ \underline{b})$ vormt een basis : $\begin{cases} 2\lambda + 1 - \mu = 0 \\ -\lambda - 1 - \mu = 0 \end{cases}$ $-$

$$3 + 2\lambda = 0$$
$$\lambda = -\frac{2}{3}. \Rightarrow \mu = -\frac{1}{3}$$

$\underline{\lambda = -\frac{2}{3}}$ : $\underline{x} = \underline{a} - \frac{4}{3}\underline{a} + \frac{2}{3}\underline{b} = -\frac{1}{3}\underline{a} + \frac{2}{3}\underline{b}$

$\underline{\mu = -\frac{1}{3}}$ : $\underline{x} = \underline{b} - \frac{1}{3}\underline{a} - \frac{1}{3}\underline{b} = -\frac{1}{3}\underline{a} + \frac{2}{3}\underline{b}$

<u>Snijpunt:</u> $\underline{\underline{\underline{s} = -\frac{1}{3}\underline{a} + \frac{2}{3}\underline{b}}}$

## De driedimensionale ruimte R3

Herhaling: R2 : $\underline{a}$ en $\underline{b}$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$) zijn onafhankelijk als:

a en b verschillende dragers hebben.

$\underline{a}$ en $\underline{b}$ afhankelijk als:

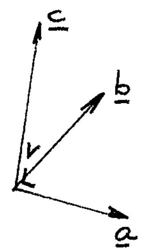
1) $\underline{a} = 0$ v $\underline{b} = 0$

2) $\underline{a}$ en $\underline{b}$ dezelfde drager hebben.

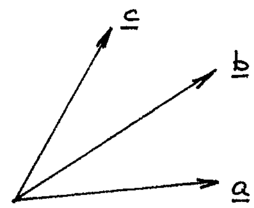
Stelling: $\underline{a}$ en $\underline{b}$ afh.: $\underline{a} = \lambda\, \underline{b}$ $\quad 1.\underline{a} + (-\lambda)\underline{b} = \underline{0}$

$\underline{a}$ en $\underline{b}$ ONafh.: $\underline{a} + \lambda\, \underline{b} = \underline{0}$ alleen als $\lambda = \mu = 0$

R3 : Drie vektoren $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ ($\bar{a} \neq 0 \wedge \bar{b} \neq 0 \wedge \bar{c} \neq 0$) zijn ONafhankelijk als ze een ruimte opspannen (dus als ze niet in één vlak of op één lijn liggen).




ONafhenkelijk

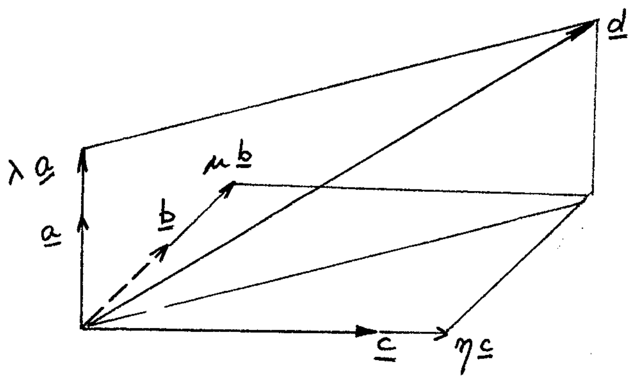



afhankelijk

Drie vektoren zijn afhankelijk als ze in een plat vlak liggen (dus ook als één van de drie $\underline{0}$ is).

Stelling: Drie vektoren zijn ONafh. als $\lambda\, \underline{a} + \mu \underline{b} + \eta\, \underline{c} = \underline{0}$ alleen als $\lambda = \mu = \eta = 0$.

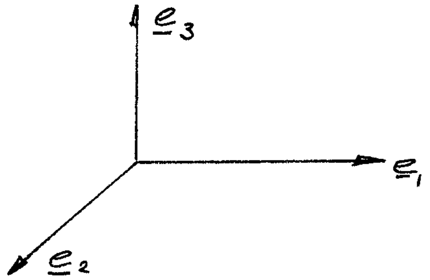
Drie ONafh. vektoren in de R3 vormen een basis.



$\underline{d} = \lambda\,\underline{a} + \mu\,\underline{b} + \eta\,\underline{c}$

$\lambda, \mu, \eta$ kentallen van $\underline{d}$. t.o.v. basis $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$

Indien de basisvektoren $\perp$ op elkaar staan en allen 1 lang zijn noemen we dit een ortho-normale basis $(\underline{e}1, \underline{e}2, \underline{e}3)$




$\underline{e}1 = 1.\ \underline{e}1 + 0.\underline{e}2 + 0.\underline{e}3$ $\quad \underline{e}1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; zó ook $\underline{e}2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{e}3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lijn door de oorsprong: $\quad \underline{x} = \lambda\,\underline{a}$

Lijn niet door de oorsprong: $\quad \underline{x} = \underline{b} + \lambda\,\underline{a}$

Voorbeeld: Gegeven: T.o.v. orthonormale basis is gegeven

$$l: \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gevraagd: Ligt het punt P (-3, -8, -6) op lijn l ?

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \ \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \ \end{pmatrix}$$

$$-3 = 1 + 2\lambda \Rightarrow \lambda = -2$$

$$-8 = -2 + 3\lambda \Rightarrow \lambda = -2 \qquad \Rightarrow P \notin \ell$$

$$-6 = 3 + 4\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{9}{4}.$$

Ligging van twee lijnen.

1) Indien de ri-vektoren elkanders veelvoud zijn lopen de lijnen evenwijdig of vallen ze samen.

2) Indien de ri-vektoren niet elkanders veelvoud zijn snijden of kruisen ze elkaar.

Voorbeeld 1: $\quad l: \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$m: \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ri-vektoren elkaars veelvoud $\Rightarrow$ $l \,//\, m$ of l op m.

<u>Controle of l op m ligt:</u>

Kies een punt van l en kontroleer of het op m ligt.

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} = \left.\begin{array}{l} -1 = 3 + 2\mu \rightarrow \mu = -2 \\ 2 = 1 - \mu \rightarrow \mu = -1 \\ 3 = 2 - \mu \rightarrow \mu = -1 \end{array}\right) \Rightarrow l//m.$$

<u>Voorbeeld 2:</u> $l : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$

$m : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\+1\\0\end{pmatrix}$

ri-vektoren niet elkaars veelvoud = l snijdt of kruist m.
Om te zien of ze elkaar snijden moet je het snijpunt proberen te vinden.

<u>Berekening ~~S~~snijpunt:</u>

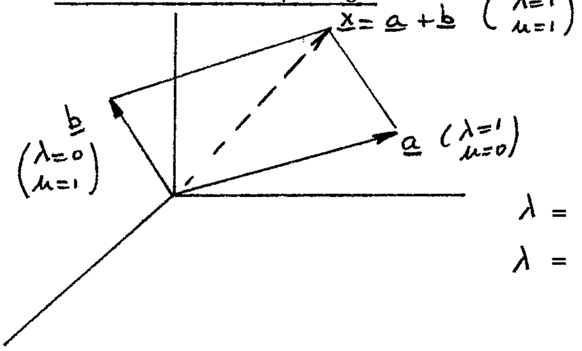
$$\left(\begin{array}{lcl} -1 + \lambda & = & -2 + 2\mu \\ -2 & = & -2 + +\mu \\ 3 + 4 & = & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mu = 0 \\ \lambda = -1 \end{array}\right) \Rightarrow \lambda = -1 \text{ en } \mu = 0 \text{ voldoen ook aan de eerste vergelijking.}$$

dus l snijdt m.

$\lambda$ invullen in l: $\underline{s} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}1\\0\\ \ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\end{pmatrix}$

# HET VLAK IN R3.

1) <u>Vlak door oorsprong:</u>




$\underline{x} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{b} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

$\lambda = 0$ en $\mu = 0$ $\quad \underline{x} = \underline{0}$

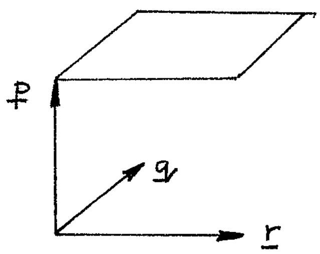
$\lambda =$ en $\mu = 1$ $\quad \underline{x} = \underline{a} + \underline{b}$

Door $\lambda$ en $\mu$ te variëren kun je ieder punt in het vlak, opgespannen door $\underline{a}$ en $\underline{b}$ beschrijven.

De factoren bepalen de stand (richting) van het vlak.

$\underline{a}$ en $\underline{b}$ heten de ri-vektoren van het vlak.

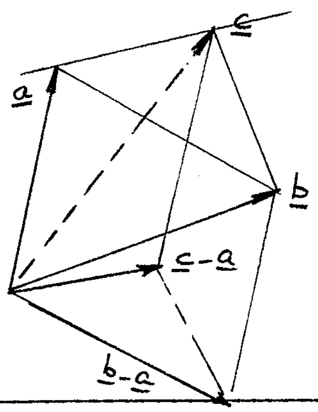
2) <u>Vlak niet door oorsprong.</u>




$\underline{x} = \bar{p} + \lambda \bar{q} + \mu \bar{r}$ Dit is de vektorvoorstelling van een vlak niet door 0.

3) <u>Vlak door 3 punten:</u> (3 punten liggen niet op een lijn)

<u>Voorbeeld:</u> Bepaal de vektorvoorstelling van het vlak door A (3,1,0), B (-2,1,4) en C (0,-2,3)




$$\boxed{\underline{x} = \underline{a} + \lambda(\underline{b} - \underline{a}) + \mu(\underline{c} - \underline{a})}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4) <u>Vlak door een lijn en een punt:</u> (punt ligt niet op de lijn)

Kies twee punten A en B op die lijn $\Rightarrow$ je hebt dan het geval vlak door drie punten.

Het omzetten van de vektorvoorstelling van een vlak in de vergelijking en het omgekeerde.

Voorbeeld 1: Vlak door 0: $\underline{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 3\mu \\ 2\lambda + \mu \\ -\lambda + 2\mu \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda + 3\mu \\ y &= 2\lambda + \mu \\ z &= -\lambda - 2\mu \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x + z &= \mu \\ z &= -\lambda - 2\mu \\ y &= 2\lambda + \mu \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \mu &= x + z \\ \lambda &= -2x - 3z \\ y &= 2\lambda + \mu \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} y &= -4x - 6z + x + z \\ &\Rightarrow \boxed{3x + 5z + y = 0} \end{aligned}$$

Voorbeeld 2: $\underline{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ 0 \\ -\mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= \lambda + \mu \\ y &= 0 \\ z &= -\mu \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lambda &= x + z \\ y &= 0.\lambda + 0.\mu \quad \Rightarrow \boxed{y = 0.} \\ \mu &= -z \end{aligned}$$

Voorbeeld 3:

$$: \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \underline{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Elke liniare combinatie van $\underline{a}$ en $\underline{b}$ is ook als ri-vektor te kiezen

b.v. $3\underline{a} + \underline{b}$ en $\underline{a} + \underline{b}$

$$3\underline{a} + \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{a} + \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Het is altijd verstandig om bij elke richtingsvektor van het vlak één (of meer) nul te hebben !

$$: \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 2 + 5\lambda + 2\mu \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu = x - 1 \\ \lambda = z - 1 \\ y = 2 + 5\lambda + 2\mu \end{cases}$$

$$y = 2 + 5(z - 1) + 2(x - 1)$$

$$\boxed{2x - y + 5z - 5 = 0.}$$

Voorbeeld 4: $\alpha : 3x - 2y + 4z - 5 = 0$

Bepaal van $\alpha$ een v.v.

Stel: $x = \lambda$ en $y = \mu$

$$3\lambda - 2\mu + 4z - 5 = 0$$

$$4z = -3\lambda + 2\mu + 5$$

$$z = -\frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{2}\mu + \frac{5}{4}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ -\frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{2}\mu + \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5/4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3/4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5/4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

====================

## Afhankelijkheid en onafhankelijkheid in R3.

Zijn de vektoren $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ afhankelijk.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{en } \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Stel: $\lambda \underline{a} + \mu \underline{b} + \eta \underline{c} = \underline{0}$

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda + 3\mu &= 0 \\ 2\lambda - \mu - 4\eta &= 0 \\ -\lambda + 2\mu + 5\eta &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5\mu + 5\eta &= 0 \\ \lambda + 3\mu &= 0 \\ 2\lambda - \mu - 4\eta &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mu + \eta &= 0 \\ 7\mu + 4\eta &= 0 \\ \lambda + 3\mu &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3\eta &= 0 \\ 7\mu + 4\eta &= 0 \\ \lambda + 3\mu &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta &= 0 \\ \mu &= 0 \\ \lambda &= 0 \end{aligned} \iff \text{Stelsel is onafhankelijk.}$$

Voorbeeld: Zijn de vektoren $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\underline{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ afhankelijk ?

Stel: $\lambda \underline{a} + \mu \underline{b} + \eta \underline{c} = \underline{0}$

$$\begin{matrix} \lambda & + & 3\mu & +4\eta & & 0 \\ 2\lambda & + & -1\mu + & \eta & = & 0 \\ -1\lambda & & 2\mu & 1\eta & & 0 \end{matrix}$$

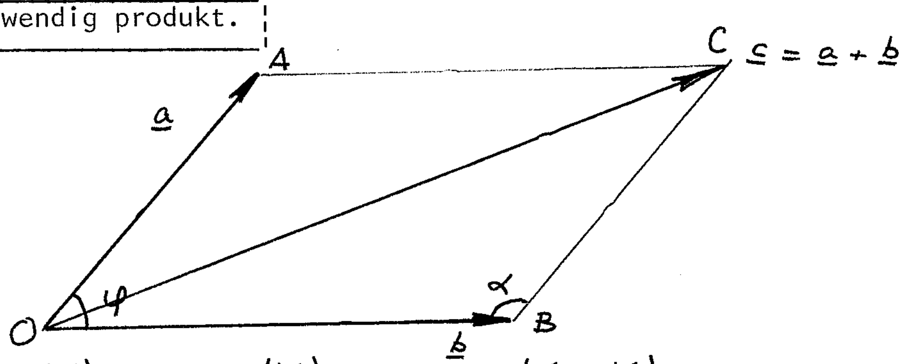
$$\begin{cases} 5\mu + 5\eta = 0 \\ -\lambda + 2\mu + \eta = 0 \\ 2\lambda - \mu + \eta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5\mu + 5\eta = 0 \\ 3\mu + 3\eta = 0 \\ -\lambda + 2\mu + \eta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mu &= -\eta \\ -\lambda + 2\mu + \eta &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mu &= -\eta \\ \lambda &= -\eta \end{aligned}$$

Kies: $\eta = -1 \Rightarrow \lambda = 1 \quad \mu = 1$

Stelsel afhankelijk want $\underline{a} + \underline{b} - \underline{c} = 0$

## Inwendig produkt.




$\underline{a} = \begin{pmatrix} a1 \\ a2 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{a} + \underline{b} = \begin{pmatrix} a1 + b1 \\ a2 + b2 \end{pmatrix}$ $\quad \alpha + \varphi = 80^\circ$

Cosinusregel in OBC

$OC^2 = OB^2 + BC^2 - 2.OB.BC.\cos\alpha$ .

$/\underline{a} + \underline{b}/^2 = /\underline{b}/^2 + /\underline{a}/^2 - 2./a/./b/.\cos\alpha.$

$(a1+b1)^2 + (a2+b2)^2 = b_1^2 + b_2^2 + a_1^2 + a_2^2 - 2/\underline{a}/./\underline{b}/./- \cos\varphi)$

$(\alpha + \varphi) = 80^\circ$

$\varphi = 80^\circ - \alpha$

$\cos\varphi = \cos 80.\cos\alpha + \sin 80.\sin\alpha.$

$\cos\varphi = -\cos\alpha \Rightarrow \quad \cos\alpha = -\cos\varphi$

$2\, a_1 .\, b_1 + 2\, a_2.b_2 = 2/\underline{a}/./\underline{b}/.\cos\varphi$

$$\cos\varphi = \frac{2\, a_1\, b_1 + 2.a_2.\, b_2}{2/\underline{a}/./\underline{b}/}$$

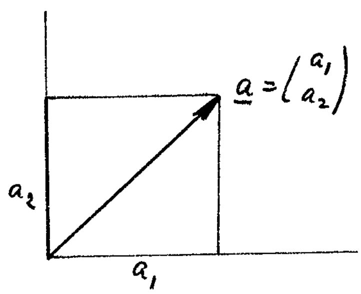
$$\boxed{\cos\varphi = \frac{.a_1\, b_1 + a_2.b_2}{/\underline{a}/./\underline{b}/}}$$

De grootheid $a_1\, b_1 + a_2\, b_2$ heet het inwendig produkt van de vektoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$

Wordt aangeduid door: $\underline{a} . \underline{b}$

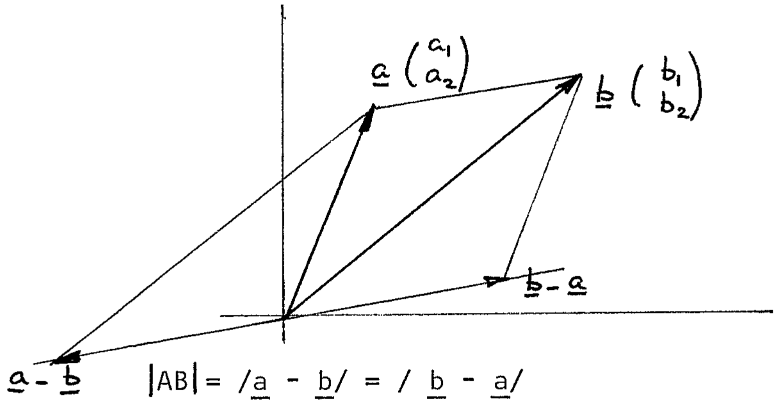
Begrippen: Afstand, hoek en inwendige produkten.

1) Lengte van een vektor:




$$\boxed{/\underline{a}/ = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

2) Afstand van 2 punten:




$|AB| = /\underline{a} - \underline{b}/ = /\ \underline{b} - \underline{a}/$

$\underline{a} - \underline{b} = \begin{pmatrix} a1 - b1 \\ a2 - b2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{|AB| = /\ \underline{a} - \underline{b}\ / = \sqrt{(a1 - b1)^2 + (a2 - b2)^2}}$$

Voorbeeld: Gegeven de vektor $\underline{a}$ $\begin{pmatrix} a1 \\ a2 \end{pmatrix}$

Bepaal een vektor $\underline{b} \perp \underline{a}$

Stel: $\underline{b} = \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \end{pmatrix}$

$\underline{b} \perp \underline{a} \Leftrightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} = 0$

$a1.b1 + a2\ b2 = 0$

Oplossing: bijv. $b1 = a2 \qquad b2 = -\ a1$

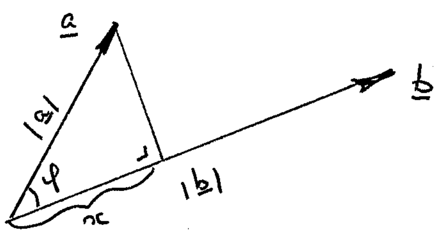
$b1 = -\ a2 \qquad b2 = a1$

Dus $\perp$ a staan: $\begin{pmatrix} -\ a2 \\ a1 \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} a2 \\ -\ a1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Wat stelt } \underline{a} \cdot \underline{b} \text{ voor ?}}$

$\cos\varphi = \dfrac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{/\underline{a}/ \cdot /\underline{b}/}$

$\underline{a} \cdot \underline{b} = /\underline{a}/ \cdot /\underline{b}/ \cdot \cos q$




$\cos q = \dfrac{x}{/a/}$

$x = /\underline{a}/ \cdot \cos\varphi$

Voorbeeld: Gegeven: $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gevraagd: Bereken de hoek tussen de vektoren.

$$\cos\varphi = \frac{a1\ b1 + a2\ b2}{/\underline{a}/ \cdot /\underline{b}/} = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{/\underline{a}/ \cdot /\underline{b}/}$$

$\underline{a} \cdot \underline{b} = 1. -2 + 3.1 = -2 + 3 = 1.$

$/\underline{a}/ = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}\ .$

$/\underline{b}/ = \sqrt{-(2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}\ .$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}.\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{10}\sqrt{2} = \underline{0{,}14142} \Rightarrow \varphi = 81^{\circ}$$

- Als $\underline{a} = \underline{0}$ v $\underline{b} = \underline{0}$ dan is $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$

- Als $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \Longrightarrow$ 1) $\underline{a} = \underline{0}$ v $\underline{b} = \underline{0}$

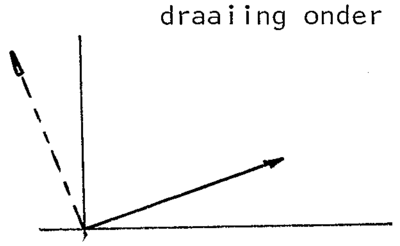
  2) $\cos\varphi = \dfrac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{/\underline{a}/./\underline{b}/} = \dfrac{0}{/a/./b/} = 0 . \Rightarrow \varphi = 90^{\circ}$

  oftewel $\underline{a} \perp \underline{b}$

Voorbeeld: $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\underline{a} \cdot \underline{b} = 2. -2 + 1 .4 = 0$ $\underline{a} \perp \underline{b}$

draaiing onder $90^{\circ}$

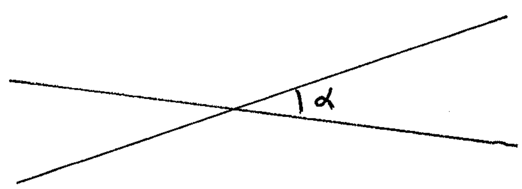


$x \to y$

$y \to -x$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

## Hoek tussen twee lijnen.

Onder de hoek tussen twee lijnen verstaan we de scherpe hoek die deze twee lijnen met elkaar maken.




$\cos\alpha = \dfrac{/\bar{a}.\bar{b}/}{/\bar{a}/./\bar{b}/}$ waarbij $\underline{a}$ en $\underline{b}$ ri-vektoren van l en m zijn.

Voorbeeld: $l$ : $\underline{x} = \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$m$ : $\underline{x} = \begin{matrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

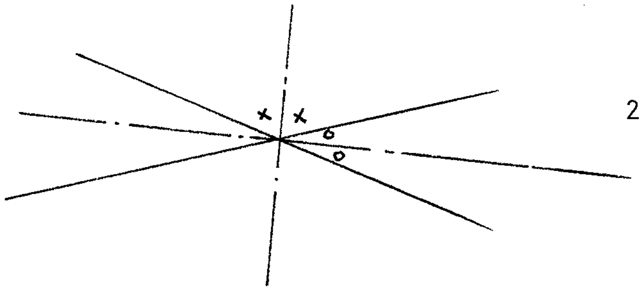
Bereken de hoek waaronder l en m elkaar kruiden !

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{/\bar{a}\ .\ \bar{b}/}{/a/\ .\ /b/} = \frac{/\ -1\ -\ 4\ -\ 12/}{\sqrt{14}\ .\ \sqrt{21}} = \frac{17}{\sqrt{294}} = 0{,}99 \Rightarrow \alpha = 88^{o}$$

## De deellijnen van twee elkaar snijdende lijnen.

De twee deellijnen staan loodrecht op elkaar.

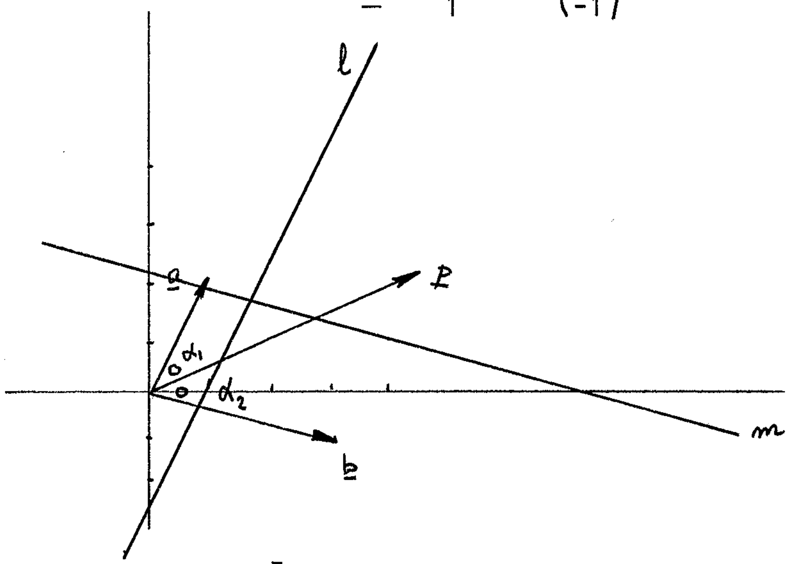


$$2.x + 2.0 = 180^{o}$$

$$x + 0 = 90^{o}.$$

Voorbeeld 1: $l : \underline{x} = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$m : \underline{x} = \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} + \mu\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$




1e methode: $\bar{p}$ deelt de hoek tussen $\underline{a}$ en $\underline{b}$ middendoor.

noem $\bar{p} = \begin{pmatrix} p1 \\ p2 \end{pmatrix}$

$$\alpha 1 = \alpha 2$$

$$\cos \alpha 1 = \cos \alpha 2$$

$$\frac{\underline{a}\ \cdot\ \underline{p}}{/\underline{a}/\ \cdot |\underline{p}|} \qquad \frac{\underline{b}\ \cdot\ \underline{p}}{/\underline{b}/\ \cdot\ |\underline{p}|}$$

$$\frac{p1\ +\ 2p2}{\sqrt{5}} = \frac{3p1\ -\ p2}{\sqrt{10}}$$

$$\sqrt{10}\,(p1 + 2p2) = \sqrt{5}\,(3p1 - p2)$$

$$\sqrt{2}\,(p1 + 2p2) = 3p1 - p2$$

$$\sqrt{2}p1 + 2\sqrt{2}p2 - 3p1 + p2 = 0.$$

$$(\sqrt{2} - 3)\,p1 + (2\sqrt{2} + 1)\,p2 = 0.$$

<u>Kies:</u> $p1 = 1 \Rightarrow p2 = \dfrac{3 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1} \qquad \Rightarrow \bar{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{3 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1} \end{pmatrix}$

De vektorvoorstelling van één lijn kun je dan bepalen.

De andere deellijn heeft een richtingsvektor die $\perp$ op $\bar{p}$ staat.

<u>Dit is de vektor</u> $\begin{pmatrix} \dfrac{3 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 1} \\ -1 \end{pmatrix}$

<u>2e methode:</u>

<u>Voorbeeld:</u> We kiezen twee ri-vektoren die evenlang zijn.

$$l : \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$m : \underline{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ri } l : \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & /\underline{a}/ = \sqrt{5} \\ \text{ri } m : \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} & /\underline{b}/ = \sqrt{10} \end{array}\right) \Rightarrow /\underline{b}/ = \sqrt{2}\,/\underline{a}/$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{a}' = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

De vektor $\bar{p} = \bar{a} + \bar{b}$ deelt de hoek tussen $\underline{a}'$ en $\underline{b}$ (dus ook tussen $\underline{a}$ en $\underline{b}$) middendoor. (eigenschap van een ruit)

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{2} \\ -1 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \bar{p} = \begin{pmatrix} -1 + 2\sqrt{2} \\ -3 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

**De lijn door een punt $\perp$ op een gegeven lijn of $\perp$ op een gegeven vlak.**

<u>Inleiding:</u> Gegeven: $\underline{a} \begin{pmatrix} a1 \\ a2 \end{pmatrix}$

Bepaal de vektor $\underline{b} = \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \end{pmatrix} \perp \underline{a}$

1) $\underline{b} \perp \underline{a}$ $\quad \underline{b} \cdot \underline{a} = 0$

$b1\ a1 + b2 . a2 = 0$

$b1 = -a2 \qquad b1 = a2$

$b2 = a1 \qquad b2 = -a1$

Dus: $\begin{pmatrix} -a2 \\ a1 \end{pmatrix}$ v $\begin{pmatrix} a2 \\ -a1 \end{pmatrix}$ staat $\perp$ op $\begin{pmatrix} a1 \\ a2 \end{pmatrix}$

Voorbeeld: $\underline{a} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{b} \perp \underline{a}$ als $\underline{b} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Voorbeeld: P . (3,4) Bepaal lijn l door P $\perp$ op de lijn

$m : \underline{x} = \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$l \perp m \qquad ri_l \perp ri_m$

$ri_m = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \qquad ri_l = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$l: \underline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lijn door (geg.) één punt $\perp$ op een vlak.

Inleiding: $\underline{a} \cdot \underline{a} = /\underline{a}/^2$

$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$

$(\underline{a} \cdot \underline{b}) = \underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot \underline{b}$

$\underline{a} \cdot (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{c}$ (Bewijs zie blz. 169)

Als $\underline{a} \perp \underline{b} \wedge \underline{a} \perp \underline{c} \Rightarrow \underline{a} \perp \lambda\, \underline{b} + \mu\, \underline{c}$

$\underline{a} \perp \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} = 0$

$\underline{a} \perp \underline{c} \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{c} = 0$

$\underline{a}\, (\lambda . \underline{b} + \mu . \underline{c}) = \underline{a} . \lambda \underline{b} + \underline{a} . \lambda \underline{c} = \lambda\, (\underline{a}.\underline{b}) + \mu\, (\underline{a} \cdot \underline{c}) = \lambda .\, o + \mu\, 0 = o$

Dus $\underline{a} \perp \lambda\, \underline{b} + \mu\, \underline{c}$

Gegeven: P ( 1,3,6)

$\alpha : \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Bepaal v.v. lijn l door P en $\perp$ op $\alpha$ !

Oplossing: $: \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\underline{a}} + \mu \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$

$ri_l$ moet $\perp$ op $\underline{a}$ en $\underline{b}$ staan.

Noem ri-vektor $\bar{p} \begin{pmatrix} P1 \\ P2 \\ P3 \end{pmatrix}$

$\bar{p} \perp \bar{a} \Rightarrow \bar{p} \cdot \bar{a} = 0 \qquad 0.p1 + 3p2 + 5p3 = 0 \qquad p2 = -\frac{5}{3}\,p3$

$\bar{p} \perp \bar{b} \qquad \bar{p} \cdot \bar{b} = 0 \qquad 3.p1 + 0p2 - p3 = 0 \qquad p3 = 3\,p1$

Kies: $p1 = 1 \qquad p2 = -5 \qquad p3 = +3$

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$l : \underline{x} = \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{matrix} + \eta \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

=============

| Snijlijn van twee gegeven vlakken. |
|---|

Voorbeeld 1: $\alpha : \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\beta : \underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bepaal de snijlijn van $\alpha$ en $\beta$!

$$\alpha : \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\beta : \underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

In ri-vektoren van de vlakken zoveel mogelijk nullen proberen te krijgen.

Voor de snijlijn geldt:

$$\left.\begin{aligned} 1 + 5\mu &= 2 + 2\eta \\ 5\lambda &= 1 + 2\rho \\ 1 + 2\lambda + 9\mu &= 1 - \eta + 3\rho \end{aligned}\right\}$$

Hieruit een verband tussen $\lambda$ en $\mu$ óf $\eta$ en $\rho$ zoeken!

$$\eta = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{2}\mu \qquad \rho = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{2}\lambda$$

$$1 + 2\lambda + 9\mu = 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{2}\mu - \tfrac{3}{2} + \tfrac{15}{2}\lambda$$

$$1 - \tfrac{11}{2}\lambda + \tfrac{23}{2}\mu = 0$$

$$2 - 11\lambda + 23\mu = 0 \qquad \lambda = \tfrac{2}{11} + \tfrac{23}{11}\mu$$

Snijlijn: $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\tfrac{2}{11} + \tfrac{23}{11}\mu\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10/11 \\ 15/11 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 115/11 \\ 145/11 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10/11 \\ 15/11 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 55 \\ 115 \\ 145 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10/11 \\ 15/11 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 11 \\ 23 \\ 29 \end{pmatrix}$$

<u>Voorbeeld 2:</u> Bepaal de v.v. van de snijlijn van $\alpha$ en $\beta$ als:

$$\alpha : x - y + 2z = 3$$
$$\beta : 2x + y + z = 1$$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3z = 4 \\ -3x - 3y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -x + \frac{4}{3} \\ y = -x - \frac{1}{3} \end{cases}$$

Kies: $x = \lambda$ , dan $y = -\lambda - 1/3$ en $z = -\lambda + 4/3$

<u>Snijlijn:</u> $\underline{x} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda - \frac{1}{3} \\ -\lambda + \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ +\frac{4}{3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

=============

<u>Voorbeeld 3:</u> $\alpha$: $y - z = 0 \Rightarrow y = z$

$\beta$: $x + z - 1 = 0 \Rightarrow x = -z + 1$

Kies: $z = \lambda$ $y = \lambda$

$x = -\lambda + 1$

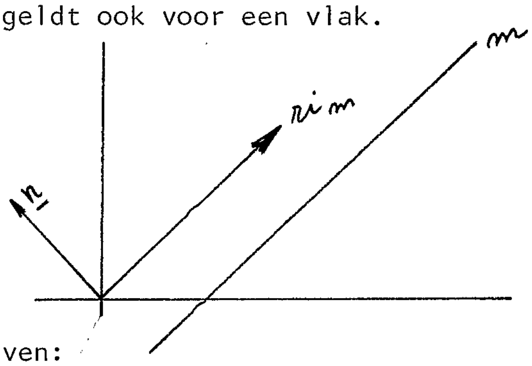
<u>Snijlijn:</u> $\underline{x} = \begin{pmatrix} -\lambda + 1 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

==========

## Normaalvektor.

Indien een vektor $\underline{n}$ $\perp$ staat op de ri-vektor van lijn m dan heet $\underline{n}$ de normaalvektor van m.
Dit geldt ook voor een vlak.




Gegeven:

$$\underline{n} \cdot \underline{x} = 0 \Leftrightarrow n_1 x + n_2 y = 0$$

$(\underline{n} \cdot \underline{x}) = 0$ Als $\underline{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ dan vormen de vektoren $\underline{x}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ een lijn met als vergelijking $2x - 3y = 0$

<u>Voorbeeld 1:</u> $3x - y = 0$
<u>normaalvektor:</u> $\underline{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

<u>Voorbeeld 2:</u> $3x - y = 5$
<u>normaalvektor:</u> $\underline{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

<u>Voorbeeld 3:</u> : $x - y + z = 0$ $\underline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Indien de lengte van de normaalvektor 1 is heet de vergelijking een normaalvergelijking.

<u>Voorbeeld 1:</u> $l: x - y = 2$

$\underline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$/\underline{n}/ = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, Kies $n' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$ dan heet $\frac{1}{2}\sqrt{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{2}y = \frac{2}{\sqrt{2}}$ de normaalvergelijking.

Voorbeeld 2: vlak : $2x + y - 4z - 2 = 0$

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$/\underline{n}/ = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}$$

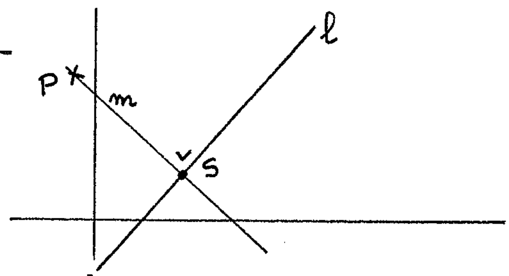
normaalvergelijking : $\boxed{\dfrac{2x + y - 4z - 2}{\sqrt{21}} = 0}$

- Een vergelijking in x en y stelt in $\mathbb{R}$ 2 een lijn voor.
- Een vergelijking in x, y en z stelt in $\mathbb{R}$ 3 een vlak voor.

conclusie: Een lijn in $\mathbb{R}$ 3 is niet door een vergelijking voor te stellen

**Afstand van punt tot lijn in $\mathbb{R}$ 2 en van punt tot een vlak in $\mathbb{R}$ 3**

1e Methode:




Gevraagd
loodrecht afstand.

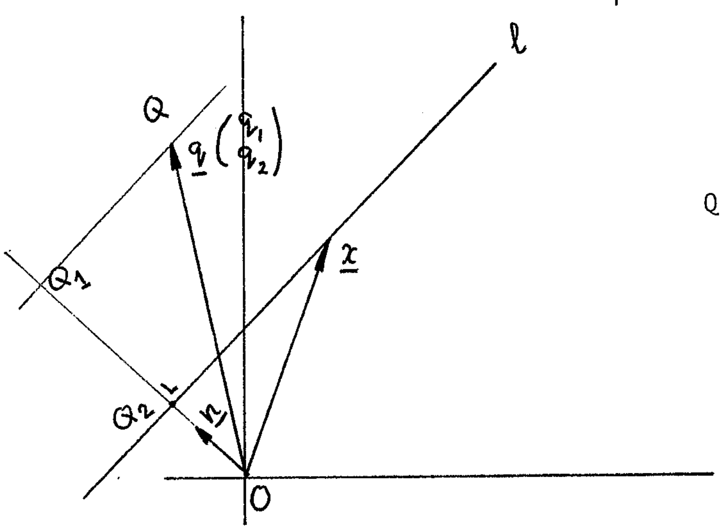
1e) Lijn door P $\perp$ 1.

2e) Bepaal snijpunt S van m en 1.

3e) Bereken afstand P S

2e Methode: M.b.v. de normaalvergelijking.

$_{-1}$ $/\underline{n}/ = 1$




$$d\ (Q_1 1) = Q_1\ Q_2$$

$$OQ_2 = \underline{n} \cdot \underline{x} = a$$

$$OQ_1 = \underline{n} \cdot \underline{q}$$

$$Q_1Q_2 = /OQ_1 - OQ_2/ = /\underline{n}.\underline{q} - \underline{n}.\underline{x}/$$
$$= /\underline{n}.\underline{q} - a/$$
$$= /n_1\ q_1 + n_2\ q_2 - a/$$

afstand is positief: d (P,l): $= \boxed{/ n1 \, . \, p1 + n2.p2 - a/}$

Voorbeeld 1: Bereken d (P,l) als P (3, 1) en l : 3x - 4y - 7 = 0.

Normaalvergelijking: $\dfrac{3x - 4y - 7}{\sqrt{g + 16}} = 0.$ of $\dfrac{3x - 4y - 7}{5} = 0.$

$$d\ (P,l) = \left| \frac{3.3 - 4.1 - 7}{5} \right| = / \frac{-2}{5} / = \boxed{\frac{2}{5.}}$$

Voorbeeld 2: Bereken d (Q.l) als Q ( 1, -1 )

$$d\ (Q,l) = \left| \frac{3.1 - 4. -1 -7}{5} \right| = 0 \Rightarrow$$ punt Q (g) ligt op de lijn.

Voorbeeld 3: Bereken afstand P (0,1,2) tot : x - y - 2z = 0.

Normaalvergelijking : $\dfrac{x - y - 2z}{\sqrt{6}} = 0$

$$d\ (P,l) = \left| \frac{0 - 1 - 4}{\sqrt{6}} \right| = \left| \frac{-5}{\sqrt{6}} \right| = \frac{5}{6} \sqrt{6}.$$

Voorbeeld 4: Bepaal alle punten op een afstand 2 van het vlak $\alpha$ :

x + y - z = 4.

Stel: B (b1,b2,b3) behoort tot de verzameling

d (B, $\alpha$ ) = 2.

Normaalvergelijking: $\dfrac{x - y - z - 4}{\sqrt{3}} = 0$

$$d\ (B, \alpha) = \frac{b1 + b2 - b3 - 4}{3} = 2.$$

$$\frac{b1 + b2 - b3 - 4}{\sqrt{3}} = 2 \qquad x + y -2 -4 - 2\sqrt{3} = 0$$

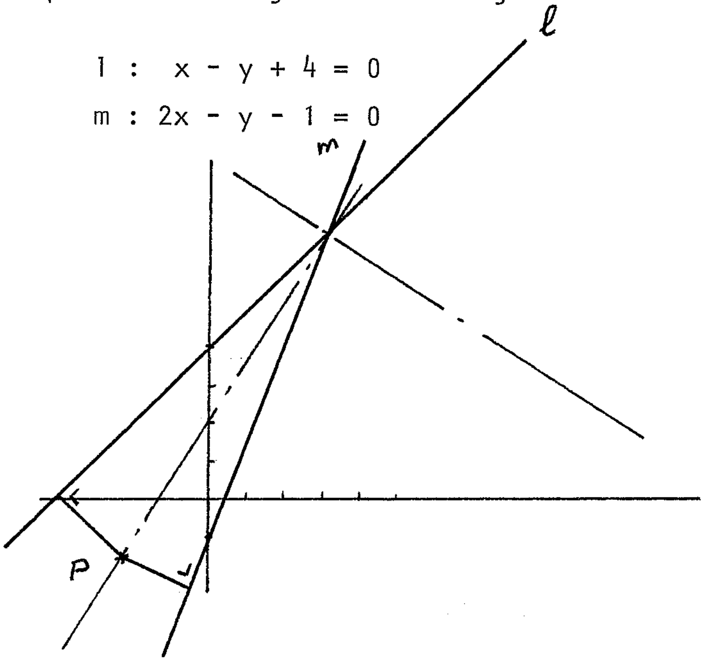
$$\frac{b1 + b2 - b3 - 4}{3} = -2 \qquad x + y - z - 4 + 2\sqrt{3} = 0$$

= = = = = = = = = = = = = = =

DEELLIJN.
=========

Bepaal de deellijnen van de lijnen:

$$l : \; x - y + 4 = 0$$
$$m : \; 2x - y - 1 = 0$$




<u>Stel:</u> P (p1, p2) ligt op de deellijn.

$d\,(P,l) = d\,(P,m)$

<u>norm.verg.</u> $l: \dfrac{x-y+4}{\sqrt{2}} = 0$ $\qquad m: \dfrac{2x-y-1}{\sqrt{5}} = 0$

$$d(P,l) = \frac{/P_1 - p_2 + 4/}{\sqrt{2}} \qquad d\,(P,m) = \frac{/\,2P_1 - P_2 - 1/}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{/\,P_1 - P_2 + 4/}{\sqrt{2}} = \frac{/2P_1 - P_1 - 1/}{\sqrt{5}}$$

1) $\sqrt{5}p_1 - \sqrt{5}p_2 + 4\sqrt{5} = 2\sqrt{2}p_1 - \sqrt{2}p_2 - \sqrt{2}$

$$(\sqrt{5} - 2\sqrt{2})\,p_1 + (\sqrt{2} - \sqrt{5})\,p_2 + 4\sqrt{5} + \sqrt{2} = 0$$

2) $\sqrt{5}p_1 - \sqrt{5}p_2 + 4\sqrt{5} = -2\sqrt{2}p_1 + \sqrt{2}p_2 + \sqrt{2}$

$$(\sqrt{5} + 2\sqrt{2})p_1 + (-\sqrt{2} - \sqrt{5})p_2 + 4\sqrt{5} - \sqrt{2} = 0$$

1) $(\sqrt{5}-2\sqrt{2})\,x + (\sqrt{2}-\sqrt{5})\,y + 4\sqrt{5} + \sqrt{2} = 0$

2) $(\sqrt{5}+2\sqrt{2})\,x + (-\sqrt{2}-\sqrt{5})\,y + 4\sqrt{5} - \sqrt{2} = 0$

## HOEKEN.

I Onder de hoek tussen twee lijnen verstaan we de scherpe hoek die twee ri-vektoren met elkaar maken.

- (ook de scherpe hoek tussen de twee normaal vektoren is goed !)

Voorbeeld 1: $l : x - y = 2 \qquad \underline{n}_l = \binom{1}{-1}$

$m : 2x - y - 4 = 0 \qquad \underline{n}_m = \binom{2}{-1}$

$$\cos\varphi = \frac{/\underline{n}_l . \underline{n}_m/}{/\underline{n}_l/ . /\underline{n}_m/} = \frac{1.2 + -1. -1}{\sqrt{2}.\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3}{10}\sqrt{10}. \approx 0{,}9$$

$$\varphi = \pm\ 10^{\circ}$$

II Onder de hoek tussen twee vlakken verstaan we de scherpe hoek die de normaalvektoren van die twee vlakken met elkaar maken.

Voorbeeld: Gegeven: $\alpha : x - y + 2 - 1 = 0.$

$\beta : 2x + y - 2 + 4 = 0.$

1. Bereken de hoek tussen $\alpha$ en $\beta$.
2. Bepaal de verg. van de deelvlakken.

1. $\measuredangle\, \alpha, \beta = \measuredangle\, \underline{n}_\alpha, \underline{n}_\beta$

$\underline{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{n}_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\cos\varphi = \frac{/\underline{n}_\alpha \cdot \underline{n}_\beta/}{/\underline{n}_\alpha \cdot \underline{n}_\beta/} = \frac{2 - 1 - 1}{\sqrt{3}.\ \sqrt{6}} = 0 \qquad \varphi = 90^{\circ} \qquad \alpha \perp \beta$$

2. <u>Stel:</u> P (p1, p2, p3) behoort tot het deelvlak.

$$a\ (P, \alpha) = d\ (P, \beta)$$

$$\frac{/\ p1 - p2 + p3 - 1\ /}{\sqrt{3}} = \frac{/\ 2p1 + p2 - p3 + 4\ /}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{p1 - p2 + p3 - 1}{\sqrt{3}} = \frac{2p1 + p2 - p3 + 4}{\sqrt{6}}$$

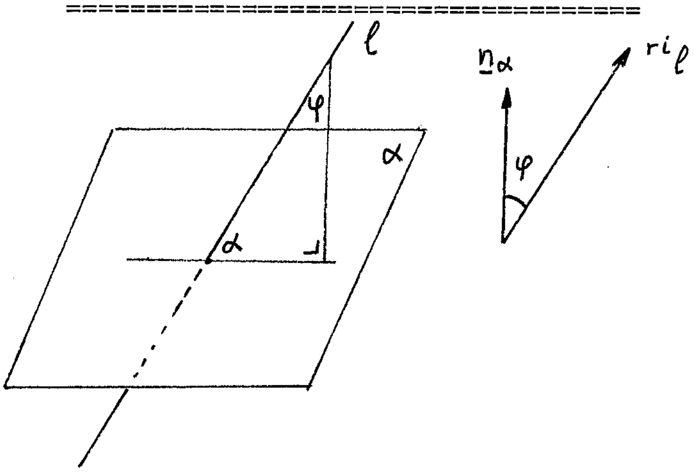
òf

$$\frac{p1 - p2 + p3 - 1}{\sqrt{3}} = -\frac{2p1 + p2 - p3 + 4}{\sqrt{6}}$$

Deelvlak 1: $(\sqrt{2} - 2)\,x + (-1 - \sqrt{2})\,y + (\sqrt{2} + 1)\,z - \sqrt{2} - 4 = 0$

Deelvlak 2: $(\sqrt{2} + 2)\,x + (+1 - \sqrt{2})\,y + (\sqrt{2} - 1)\,z - \sqrt{2} + 4 = 0$

DE HOEK TUSSEN EEN LIJN EN EEN VLAK:
===================================




$\alpha = 90 - \varphi$ waarbij $\varphi$ de scherpe hoek is tussen $ri_1$ en $\underline{n}_\alpha$.

$\cos \varphi = \sin \alpha$

Bereken de hoek die $1 : \bar{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ maakt met

$$\alpha : \bar{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} 1 \quad \rho \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\alpha : \underline{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{l} x = 2 + 2u \longrightarrow \mu = \tfrac{1}{2}x - 1 \\ y = 1 - 2\lambda \longrightarrow \lambda = \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2} \\ z = \lambda + 3u \end{array}\right.$$

$$z = -\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}x - 3$$

$$2z = -y + 1 + 3x - 6$$

$$3x - y - 2z - 5 = 0$$

$$\underline{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad ri\ 1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos \varphi = \frac{/\underline{n}_\alpha \cdot ri\ 1/}{/\underline{n}_\alpha/ \cdot /ri\ 1/} = \frac{/-3\ -2\ -2/}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} = \frac{7}{84} = \frac{7}{9{,}2} = 0{,}76 \qquad \varphi = 39^\circ$$

$$\alpha = 90^\circ - \varphi$$

$$\alpha = 90^\circ - 39^\circ$$

$$\alpha = 51^\circ$$

========