INTEGRAALREKENING.

Onder een primitieve funktie F(x) van een funktie f(x) verstaan we de funktie F(x) waarvoor geldt:

$$F'(x) = f(x)$$

Bijv. $f(x) = 2x \quad F(x) = x^2 + c \quad (c \quad R)$

een primitieve funktie $f(x) = 2x \quad F(x) = x^2$

de primitieve funktie $f(x) = 2x \quad F(x) = x^2 + c$

Rekenregels:

Als $f(x) = c$	$F(x) = cx + C$
$f(x) = x^n (n \neq 1)$	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$
$f(x) = 4(x) + v(x)$	$F(x) = U(x) + V(x) + C$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = - \cos x + C$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + C$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$
$f(x) = \frac{1}{x} \; (= x^{-1})$	$F(x) = \ln / x / + C$

Voorbeelden.

Vb: 1. $f(x) = \frac{1}{3x^4} + x^2 - g$

$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3} x^3 - gx + C$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^6}} = \frac{1}{x^{6/5}} = x^{-6/5}$$

$$F(x) = \frac{1}{-1/5x}^{-1/5}$$

$$= -5x^{-1/5} + c$$

$$= \frac{-5}{x^{1/5}} + c = \frac{-5}{\sqrt[5]{x}} + c$$

Het bepalen van de primitieve funktie noemt men wel onbepaald integreren.

Integreren van samengestelde funkties:

Vb: 2. $\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + C$

$\int (2x + 1)^2 dx =$

Noem: $p = 2x + 1$

$\frac{dp}{dx} = 2$

$dp = 2dx \qquad dx = \frac{1}{2}\, dp$

$d(2x + 1) = 2dx$

$dx = \frac{1}{2} d\ (2x + 1)$

$\int (2x + 1)^2 \,.\, dx$

$\int (p)^2 \,.\, \frac{1}{2}\, dp$

$\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ (p)^3\ .$

$\frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{3}\ (2x + 1)^3 + C$

$\frac{1}{6}\ (2x + 1)^3 + C$

$(2x + 1)^2 . dx$

$= (2x + 1)^2 \,.\, \frac{1}{2}\, d\ (2x + 1)$

$= \frac{1}{2}\ (2x+1)^2 \,.\, d(2x + 1)$

$= \frac{1}{2}\ p^2 . dp = \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{3}\ p^3 + C$

$= \frac{1}{6}\ (2x + 1)^3 + C$

Vb: 3. $\int \sin 2x\, dx$

Noem: $p = 2x$

$\frac{dp}{dx} = 2$

$dp = 2\, dx \qquad dx = \frac{1}{2}\, dp.$

$\int \sin 2x\, dx$

$= \int \sin p .\ \frac{1}{2}\, dp$

$= \frac{1}{2} \int \sin p\, dp = \frac{1}{2} \int \sin p\, dp$

$= \frac{1}{2}\ (-\cos p) + C$

$= -\frac{1}{2} \cos 2x + C$

Vb: 4. $\int \sin x \cdot \cos x \cdot dx$

Noem: $p = \sin x$

$$\frac{dp}{dx} = \cos x$$

$$dp = \cos x \, dx \qquad dx = \frac{dp}{\cos x}$$

$$\int \sin x \cdot \cos x \cdot dx$$
$$= \int p \cdot dp = \tfrac{1}{2} p^2 + C$$
$$= \tfrac{1}{2} \sin^2 x + C$$

Vb: 5. $\int x \sin (3x^2 - 4) \, dx$

Noem: $p = 3x^2 - 4$

$$\frac{dp}{dx} = 6x$$

$$dp = 6x \, dx$$

$$dx = \frac{dp}{6x}$$

$$\int x \sin p \frac{dp}{6x} = \int \frac{1}{6} \sin p \, dp = \frac{1}{6} \int \sin p \cdot dp$$

$$= \frac{1}{6} (-\cos p) + C = \frac{1}{6} (-\cos 3x^2 - 4) + C$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot \cos (3x^2 - 4) + C$$

! ! Vb: 6. $\int \sin^2 5x \, dx$

$$p = 5x$$

$$\frac{dp}{dx} = 5$$

$$dx = \frac{1}{5} dp.$$

$$\int \sin^2 5x \, dx$$
$$= \int \sin^2 p \cdot \frac{1}{5} dp \qquad \left(\cos 2p = 1 - 2 \sin^2 p \right)$$
$$= \frac{1}{5} \int \sin^2 p \cdot dp \qquad \left(\sin^2 p = \frac{1 - \cos 2p}{2} \right)$$
$$= \frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2p \right) dp$$
$$= \frac{1}{5} \int \frac{1}{2} dp - \frac{1}{5} \int \frac{1}{2} \cos 2p \cdot dp$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} p - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sin 2p + C$$
$$= \frac{1}{10} \cdot p - \frac{1}{20} \sin 2p + C$$
$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{20} \sin 10x + C$$

Vb: 7.

$\int x \cos(x^2 + 1)\, dx$ Stel: $g = (x^2 + 1)$

$\frac{dg}{dx} = 2x \quad dx = \frac{dg}{2x}$

$\int x \cos\,(x^2 + 1)\, dx$

$\int x \cos g \,.\, \frac{dg}{2x}$

$\int \cos g \,.\, \frac{dg}{2} = \int \frac{1}{2} \cos g \,.\, dg = \frac{1}{2} \int \cos g \,.\, dg$

$\frac{1}{2} \sin g + C$

$\frac{1}{2} \sin\,(x^2 + 1) + C$

Vb: 8.

$\frac{4x}{x^2 + 1} \,.\, dx$ Stel: $g = x^2 + 1$

$\frac{dg}{dx} = 2x$

$dg = 2x \,.\, dx$

$dx = \frac{dg}{2x}$

$\int \frac{4x}{g} \cdot \frac{dg}{2x} = \int 2 \frac{dg}{g} = 2 \int \frac{1}{g}\, dg$

$= 2 \ln / g / + C$

$= 2 \ln / x^2 + 1 / + C$

Een primitieve funktie wordt een logaritme indien f(x) de vorm heeft van:

$\frac{c.\, K'(x)}{K(x)}$

Vb: 9. $\int x\, e^{x^2+4} .\, dx$ Stel: $g = x^2 + 4$

$\frac{dg}{dx} = 2x$

$dg = 2x \,.\, dx$

$dx = \frac{dg}{2x}.$

$= \int x.e^g \,.\, \frac{dg}{2x}$

$= \int \frac{1}{2} e^g \,.\, dg$

$= \frac{1}{2} \int e^g \,.\, dg$

$= \frac{1}{2} e^g + C$

$= \frac{1}{2} e^{x^2+4} + C \,.$

Vb: 10.

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} \cdot dx$$

Stel: $g = \sin x$

$$\frac{dg}{dx} = \cos x$$

$$dg = \cos x \cdot dx$$

$$dx = \frac{dg}{\cos x} .$$

$$\int \sin^{-3} x \cdot \cos x \cdot dx$$

$$= \int g^{-3} \cdot \cos x \cdot \frac{dg}{\cos x}$$

$$= \int g^{-3} \cdot dg = - \frac{1}{2} g^{-2} + C = \frac{-1}{2 \sin^2 x} + C$$

BEPAALDE INTEGRALEN EN OPPERVLAKTEBEREKENING.

Onder een bepaalde integraal, aangeduid met

$\int_a^b f(x)\ dx$, verstaan we $F(b) - F(a)$

$f(x)$ heet de integrand. a = ondergrens.
b = bovengrens.

Voorbeeld 1: $\int_0^1 x.dx = \left[\frac{1}{2}\ x^2 + C\right]_0^1 = (\frac{1}{2}\ (1)^2 + C) - (\frac{1}{2}.0^2 + C)$

$$= \frac{1}{2} + C - 0 + C$$

$$= \frac{1}{2}\ .$$

Regels:

1) $\int_a^b c.f(x)\ dx = c \int_a^b f(x)\ .\ dx$

Bewijs: $c\ f(x)\ dx = c\ F\ (x) \Big|_a^b$

$$= c\ F\ (b) - c\ F\ (a)$$

$$= c\ (\ F(b) - F(a)\ )$$

$$= c.\quad f(x)\ dx.$$

2) $\int_a^b f(x)\ .\ dx = \int_a^c f(x)\ .\ dx + \int_c^b f(x)\ .\ dx$ met $a < c < b$

$\int_a^b f(x)\ .\ dx = \underline{F(b) - F(c)}\ +$

$\int_a^c f(x)\ .\ dx + \int_c^b f(x)\ .\ dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ .\ dx\ .$

Voorbeeld:

1. $\int_1^2 x.dx + \int_2^3 x.dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_2^3$

$= (\frac{1}{2} . 2^2 - \frac{1}{2} . 1^2) + (\frac{1}{2} . 3^2 - \frac{1}{2} . 2^2) = 4.$

$\int_1^3 x.dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3 = \frac{1}{2} . 3^2 - \frac{1}{2} .1.^2 = 4.$

! 2. $\int_2^4 /x-3/ \, dx$

$/ x-3 /$ $x-3$ als $x > 3$

$-x+3$ als $x < 3$

$\int_2^4 / x-3 / dx = \int_2^3 / x-3 / dx + \int_3^4 / x-3 / dx$

$= \int_2^3 -(x-3) \, dx + \int_3^4 (x-3) \, dx$

$\int_2^3 (-x+3) . dx + \int_3^4 (x-3) \, dx$

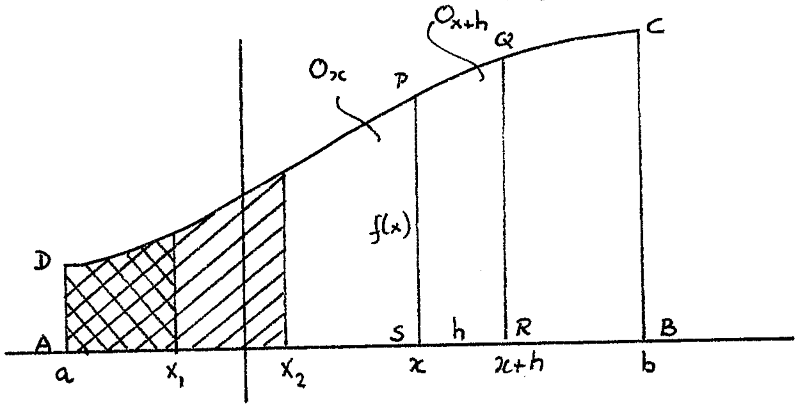
$= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_2^3 + \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_3^4$

$= (-\frac{1}{2} 9 + 9) - (\frac{1}{2}.4 + 6) + (\frac{1}{2} . 16 - 12) - (\frac{1}{2} . 9 - 9)$

$= \frac{9}{2} - 4 - 4 + \frac{9}{2} = 1$

OPPERVLAKTE BEREKENING.

Gegeven een funktie $f(x)$ op $[a,b]$



$x_1 \longrightarrow 0x\ 1$

$x_2 \longrightarrow 0x\ 2$

Bij elke $x \in [a,b]$ behoort precies één 0x: dit is dus een funktie $0(x)$

$$\left.\begin{array}{l} p(x) = 0x \\ p(x+h) = 0x+h \end{array}\right\} \quad \text{opp. P.QRS} = 0x + h - 0x$$
$$= p\ (x+h) - p(x)$$

$$\text{opp. PQRS} \approx h.f(x)$$

$$h.f(x) \approx p\ (x+h) - p(x)$$

$$f(x) \approx \frac{p\ (x+h) - p(x)}{h.}$$

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{p(x+h) - p(x)}{h.}$$

$$f(x) = p'(x)$$

$$p(x) = F(x) + C$$

$$\left.\begin{array}{l} p(a) = F(a) + C \\ p(a) = 0. \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} F(a) + C = 0 \\ C = -F(a) \end{array}$$

$$p(x) = F(x) - F(a)$$

opp. ABCD = $p(b) = F(b) - F(a)$

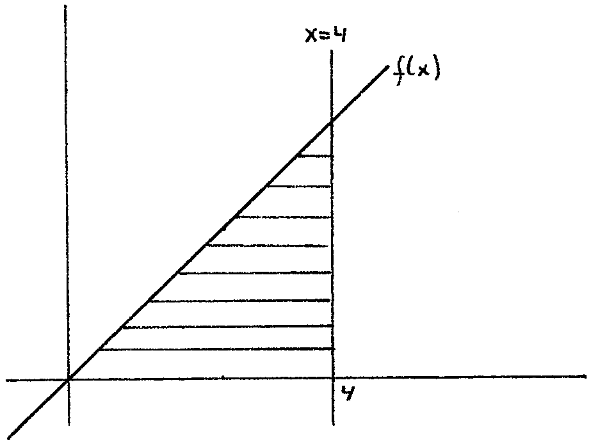
opp. ABCD = $\int_a^b f(x)\ .\ dx.$

Stelling:

De oppervlakte van een positieve funktie tussen de grenzen a,b is gelijk aan $\int_a^b f(x)\ dx$.

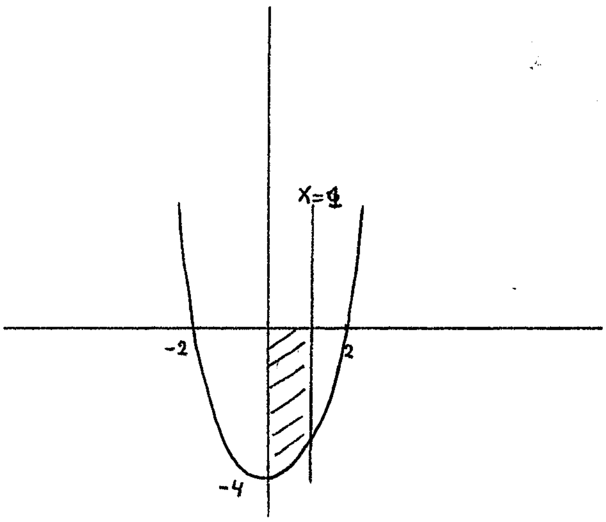
Indien de oppervlakte onder de x-as ligt geldt dat deze oppervlakte gelijk is aan $- \int_a^b f(x)\ .\ dx$

Voorbeeld 1: Bereken de opp. van het vlakdeel ingesloten door de lijnen $f(x) = x$, $(x = 0)$, $x = 4$ en de x-as.



$$0 = \int_0^4 f(x)\ dx = \int_0^4 x.dx = \left[\frac{1}{2}\ x^2\right]_0^4 = \frac{1}{2}\ .\ 4^2 - \frac{1}{2}\ .\ 0^2 = 8$$

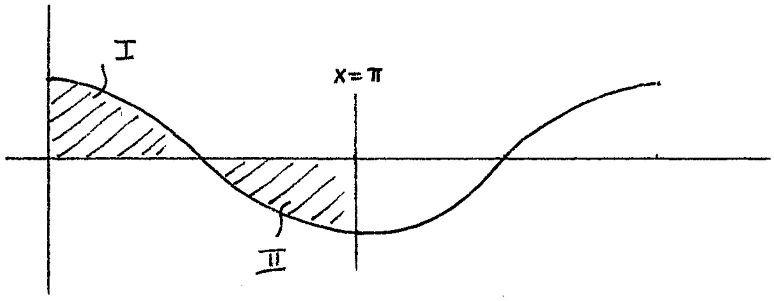
Voorbeeld 2: Bereken de opp. ingesloten door $f(x) = x^2 - 4$, $x = 0$, $x = 1$ en de x-as.



$$0 = - \int_0^1 f(x)\ .\ dx = - \int_0^1 (x^2 - 4).\ dx = - \left[\frac{1}{3}\ x^3 - 4x\right]_0^1$$

$$-\left[\left(\frac{1}{3}\ .\ 1^3 - 4\right) - 0\right] = -.-\ \frac{11}{3} = \frac{11}{3}.$$

Voorbeeld 3: Bereken de opp. van de vlakdelen ingesloten door de grafieken van $f(x) = \cos x$ $X = 0$, $X = \pi$ en de x-as.



$$0 = 0_{I} + 0_{II}.$$

$$0_{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

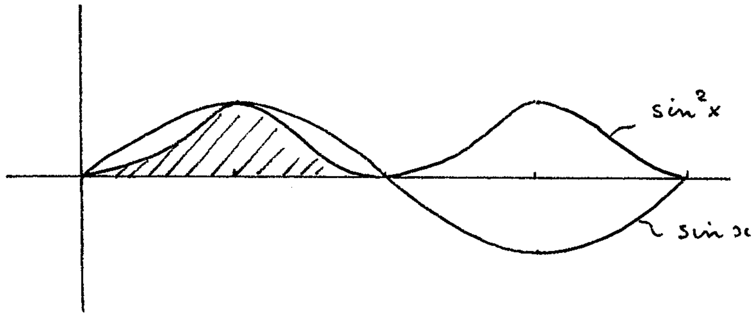
$$= \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

$$0_{II} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,.\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,.\,dx = -\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= -\left(\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2}\right) = -(0 - 1) = -(-1) = 1$$

$$0_{tot} = 1 + 1 = 2.$$

<u>Voorbeeld 4:</u> Als voorbeeld 3, maar $f(x) = \sin^2 x$.



$$0 = \int_0^{\pi} f(x).\,dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x\ .\ dx.\ \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\ .\ dx$$

$$\left.\begin{aligned} \cos 2x &= 1 - 2\sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ 2\sin^2 x &= 1 - \cos 2x \\ \sin^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2} \end{aligned}\right) \quad \begin{aligned} &= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2}. - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\ .\ \pi - \frac{1}{4}\sin 2\pi\right) - \left(\frac{1}{2}.0 - \frac{1}{2}.\ \frac{1}{2}.\ \sin 2.0\right)$$

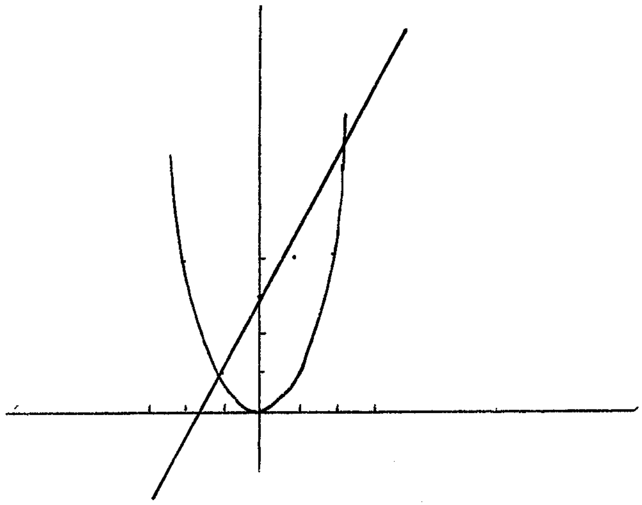
$$= \frac{\pi}{2}$$

<u>Voorbeeld 5:</u> De opp. van het vlakdeel ingesloten door $f(x)$, $y = 1$, $y = 3$ en de y-as, als $f(x) = \frac{1}{x+4}$

$$0 = {}_{-1}^{2}\ f(x)\ dx = {}_{-1}^{2}\ \frac{1}{x+4}.dx = \ln / x+4 /\ {}_{-1}^{2}$$

$$= \ln 6 - \ln 3 = \frac{\ln 6}{\ln 3} = \ln 2$$

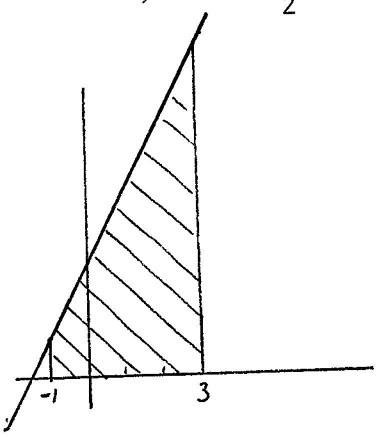
Voorbeeld 6: Bereken de opp. van het vlakdeel $f(x) = x^2$ en $g(x) = 2x + 3$.

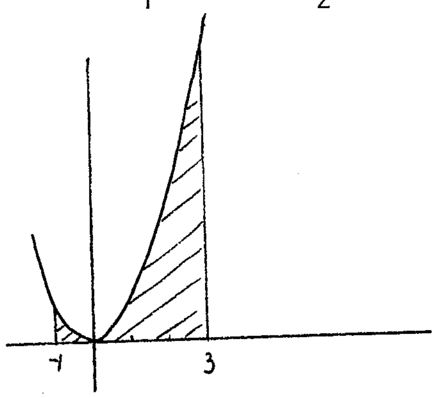


Berekening van de snijpunten:

$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 = 2x + 3$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \qquad x_1 = 3 \qquad x_2 = -1$$





$$O = \int_{-1}^{3} g(x)\,dx - \int_{-1}^{3} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{3} \left[g(x) - f(x) \right] dx = \int_{-1}^{3} (2x + 3 - x^2)\,dx$$

$$= \left[x^2 + 3x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^{3} = (9+9-9) - (1-3+\frac{1}{3}) = 9 + 1\,\frac{2}{3} = 10\ 2/3$$

! Voorbeeld 7: Opp. vlakdeel ingesloten door
$f(x) = x^2 - 2x - 4$ en $g(x) = x^2 + x +$

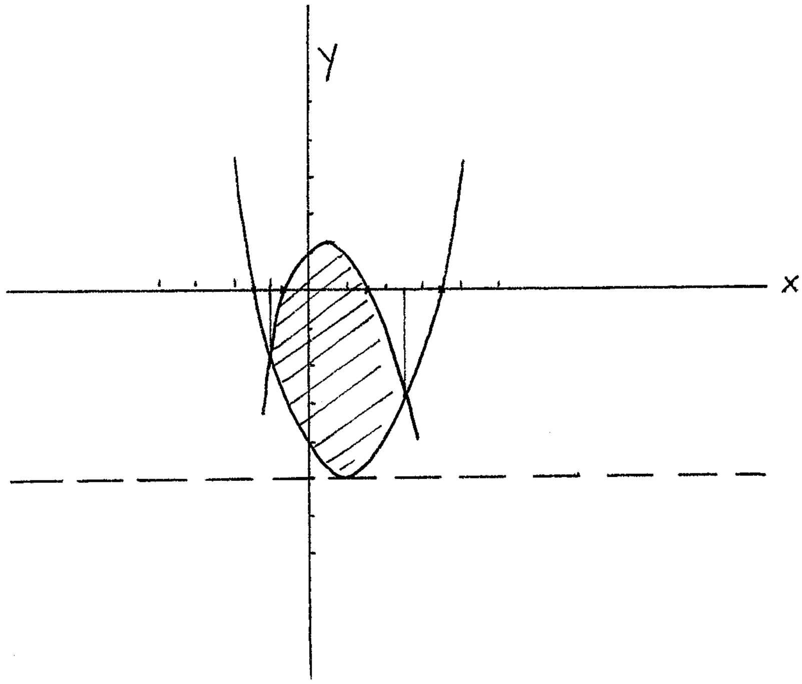
Snijpunten: $f(x) = g(x)$

$x^2 - 2x - 4 = -x^2 + x + 1$

$2x^2 - 3x - 5 = 0$

$(x + 1)\ (2x - 5) = 0$

$x = -1 \quad v \quad x = \frac{5}{2}$



Snijpunt x-as: $f(x) = 0$: $x^2 - 2x - 4 = 0$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2}$ $x_1 = 1 + \sqrt{5}$ $x_2 = 1 - \sqrt{5}$.

$g(x) = 0$: $-x^2 + x + 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{-2} = \quad x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \quad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

We verschuiven de x-as tot het te berekenen vlakdeel boven de x-as komt te liggen.
De x-as over 5 eenheden naar beneden schuiven is hetzelfde als de grafieken over 5 eenheden naar boven schuiven. T.o.v. het nieuwe assenstelsel worden de vergelijkingen resp.

$f(x) = x^2 - 2x - 4 + (5) = x^2 - 2x + 1.$

$g(x) = -x^2 + x + 1 + (5) = -x^2 + x + 6.$

$$0 = \int_{-1}^{\frac{5}{2}} g(x)\ dx - \int_{-1}^{\frac{5}{2}} f(x).dx$$

$$= \int_{-1}^{\frac{5}{2}} g(x) - f(x)\ dx$$

$$= \int_{-1}^{\frac{5}{2}} (-2x^2 + 3x + 5)\ .\ dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3x}^3 + \frac{3}{2x}^2 + 5x \right]_{-1}^{\frac{5}{2}}$$

$$= \left(-\frac{250}{24} + \frac{75}{8} + \frac{25}{2} \right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 5 \right)$$

$$= \left(-\frac{250}{24} + \frac{225}{24} + \frac{300}{24} \right) - \left(-\frac{68}{24} \right)$$

$$= \frac{343}{24}$$

Voorbeeld 8: $f(x) = \cos^2 x + 2 \sin x$ met $0^\circ \leqslant x \leqslant 360^\circ$.

a) Snijpunten met de x-as
b) Bepaal f'(x)
c) Bereken de lokale extremen
d) Bereken de buigpunten (x coördinaten)
e) Bereken de opp. van het vlakdeel dat boven de x-as ligt.

a) Snijpunten met de x-as:

$f'(x) = 0$

$$\cos^2 x + 2 \sin x = 0$$

$$1 - \sin^2 x + 2 \sin x = 0$$

$$\sin^2 x - 2 \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$\sin x = 1 + \sqrt{2} \quad \vee \quad \sin x = 1 - \sqrt{2}$$

$$\sin x = 2{,}4 \quad \vee \quad \sin x = -0{,}4$$

geen opl. $\qquad x = 205^\circ$

$x = 335^\circ$

b) f'(x): Stel: $f'(x) = 0$

$$-2 \cos x \,.\, \sin x + 2 \cos x = 0$$

$$2 \cos x\,(-\sin x + 1) = 0$$

$$2 \cos x = 0 \quad \vee \quad \sin x = 1$$

$\cos x = 0 \qquad x = 90^\circ$.

$x = 90^\circ$

$\vee\ x = 270^\circ$

f'	0	+	0	−	0	+	360°
			90°		270°		

		max.		min.	
F	st.		dal.		st.
		90°		270°	

niet

c) Maximum voor $x = 90^o$: $f(90^o) = 0^2 + 2.1 = 2.$

Minimum voor $x = 270^o$: $f(270^o) = 0^2 - 2.1 = -2.$

Randextremen voor $x = 0^o$ $f(0) = 1.$

Randextremen voor $x = 360^o$ $f(0) = 1.$

d) Buigpunten.

$f'(x) = - 2 \sin x \cdot \cos x + 2 \cos x$

$f''(x) = 2 \sin x \cdot \sin x - 2.\cos x \cdot \cos x - 2 \sin x$

$= 2 \sin^2 x - 2 \sin x - 2 \cos^2 x$

$\sin^2 x - \sin x - \cos^2 x = 0$

$\sin^2 x - \sin x + \sin^2 x - 1 = 0$

$2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$2 \sin^2 x - 2 \sin x + \sin x - 1 = 0$

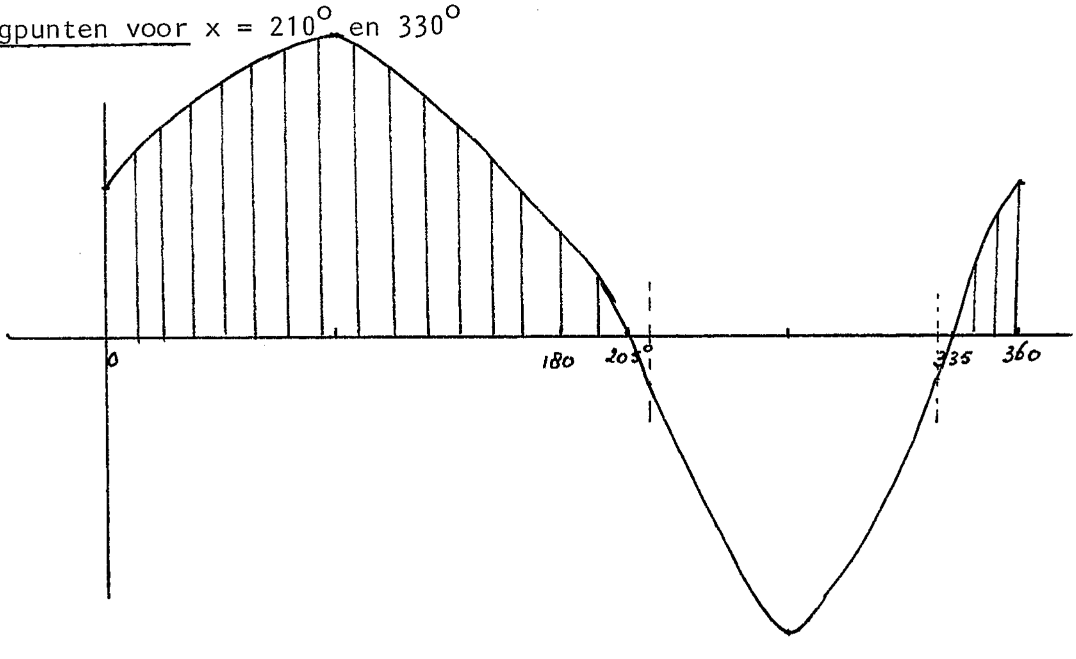
$\sin x_1 = - \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\sin x_2 = 1.$

$x_1 = 210^o$ $\qquad$ $x_2 = 90^o$

$\vee \; x_1 = 330^o$

0	-	0	-	B.P.	+	B.P.	-	360
		90^o		210^o		330^o		

Buigpunten voor $x = 210^o$ en 330^o



niet x

e) $0_{tot.} \int_{0^o}^{205^o} f(x).dx + \int_{335}^{360} f(x)dx$ of $0_{tot.} = \int_{-25^o}^{205} f(x).dx$

$$= \int_{-25}^{205} (\cos^2 x + 2\sin x) . dx$$

$$= \int_{-25}^{205} \left(\frac{\cos 2x + 1}{2} + 2\sin x\right) . dx$$

$$= \int_{-25}^{205} \left(\frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{2} + 2\sin x\right) . dx$$

$$\left[\frac{\frac{1}{2}\sin 2x}{2} + \frac{1}{2}x - 2\cos x\right]_{-0,44}^{3,6}$$

$$= \frac{1}{4}\sin 410^o + \frac{1}{2}(3,6) - 2\cos 205^o - \frac{1}{4}\sin(-50)^o + \frac{1}{2.} - 2.\cos(-25)^o$$

$$=\left[\frac{1}{4}. 0,766 + 1,8 - 2.(-0,91)\right] - \left[-\frac{1}{4}(0,766) - 0,22 - 2.0,91\right]$$

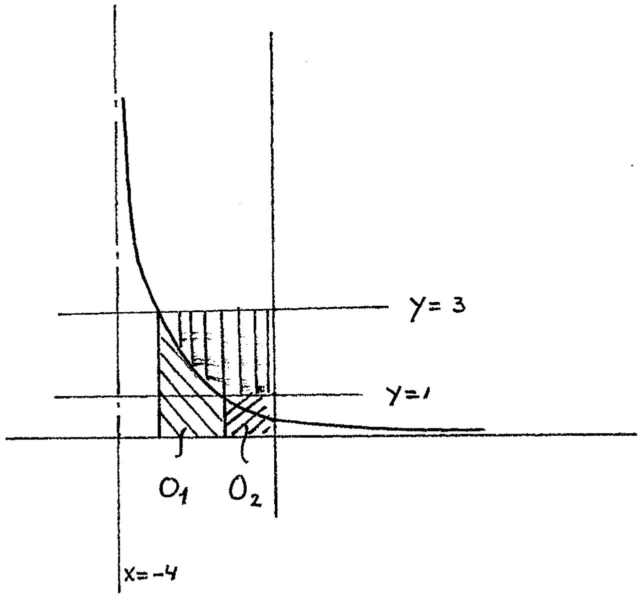
$$= 0,191 + 1,8 + 1,81 - \left[- 0,191 - 0,22 - 1,82\right] =$$

$$= (3,811) - (-2,231) = \underline{\underline{6,042}}$$

<u>Voorbeeld 9:</u> Gegeven: $f(x) = \frac{1}{x+4}.$

Bereken de opp. van het vlakdeel ingesloten door

$f(x)$, $y = 3$, $y = 1$ en de y-as.



<u>1e manier:</u> $f(x) = 3$ $\qquad 3 = \frac{1}{x+4}$ $\qquad f(x) = 1$ $\qquad 1 = \frac{1}{x+4}$

$$3x + 12 = 1 \qquad\qquad x + 4 = 1$$

$$3x = -11 \qquad\qquad x = -3$$

$$x = -\frac{11}{3.}$$

$$0_{tot} = \frac{11}{3} \cdot 3 = \frac{33}{3} = 11$$

$$0_2 = 3.1 = 3.$$

$$0_1 = \int_{-\frac{11}{3}}^{-3} \frac{1}{x+4} \cdot dx = \Big[\ln / x+4/\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{-3} =$$

$$= \ln / -3+4 / - \ln / \frac{\pi}{3} + 4 /$$

$$= \ln 1 - \ln \frac{1}{3} = 0 - \ln \frac{1}{3}$$

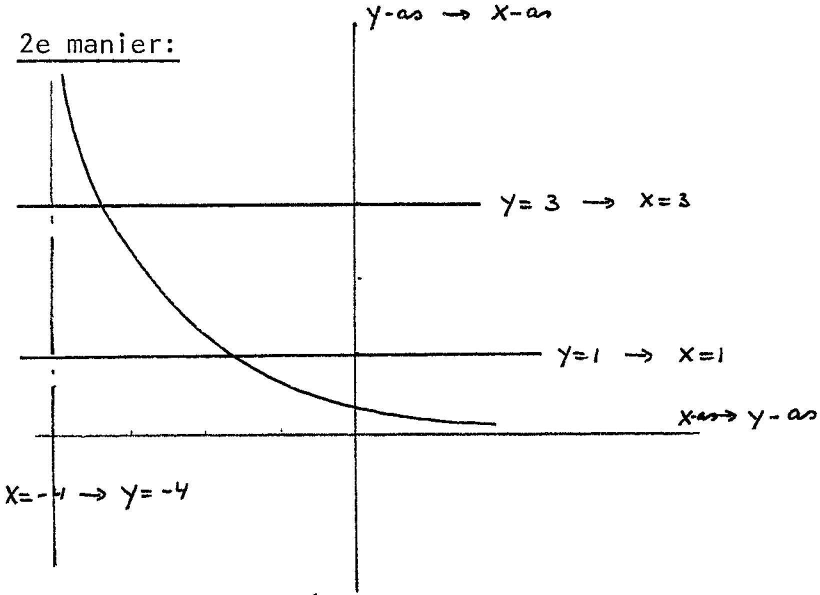
$$= 0 - (\ln 1 - \ln 3)$$

$$= 0 - (0 - \ln 3) = \ln 3.$$

$$0_{tot} - 0_1 - 0_2 = 11 - 3 - \ln 3$$

$$= \underline{\underline{8 - \ln 3.}}$$

<u>2e manier:</u>



$$f(x) = \frac{1}{x+4}.$$

$$y = \frac{1}{x+4}. \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{y+4}. \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{x} - 4$$

$$0 = -\int_1^3 \left(\frac{1}{x} - 4\right).dx = -\left[\ln / x / - 4x\right]_1^3$$

$$= -\{(\ln 3 - 12) - (\ln 1 - 4)\} = -\{\ln 3 - 12 + 4\} =$$

$$= -\{\ln 3 - 8\}$$

$$= \underline{\underline{8 - \ln 3}}$$

! Voorbeeld 10: Gegeven: $f(t) = e^{1 - \frac{t}{10}}$ $(\tau = 10\ sec)$

Gevraagd: 1) Voor welke t geldt $f(t) = 0{,}8\ f_{max}$.

a) Bereken fmax.

$$f(t) = e^{1 - \frac{t}{10}} = e^{1-0{,}1t} \qquad D_f = \{ t \mid t \geq 0 \}$$

$$f'(t) = e^{1-0{,}1t} \cdot -\frac{1}{10}$$

$$= -\frac{1}{10} \cdot e^{1-\frac{t}{10}}$$

$$e^{1-\frac{t}{10}} > 0 \text{ voor elke } t \Rightarrow f'(t) < 0 \text{ voor elke } t$$

$f'(t) < 0 \rightarrow f(t)$ dalend voor elke t

f(t) ——— dalend ———

Randmax. treedt op voor $t = 0$

$f(0) = f_{max} = e^{1-0} = e$

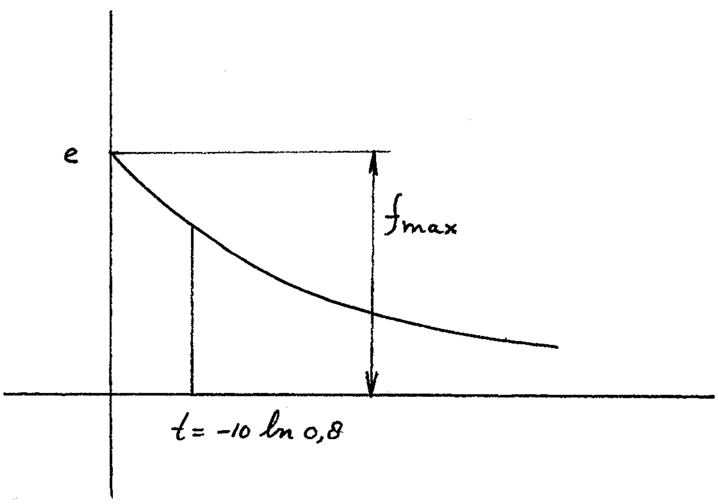
$$f(t) = 0{,}8\ f\ max$$

$$e^{1-0{,}1t} = 0{,}8\ e$$

$$\ln e^{1-0{,}1t} = \ln 0{,}8\ e \qquad -0{,}1t = \ln 0{,}8$$

$$(1-0{,}1t) \cdot 1 = \ln 0{,}8 + \ln e \qquad t = -10 \ln 0{,}8$$

$$1-0{,}1t = \ln 0{,}8 + 1$$



<u>Voorbeeld 11:</u> $f(x) = x.e^{-x^2+1}$

a) <u>Snijpunten met de x-as:</u>

$f(x) = 0: \quad x.e^{-x^2+1} = 0$

$x = 0 \quad v \quad e^{-x^2+1} = 0$

$Ov = x = 0 \Rightarrow S = (0,0)$

b) $f'(x) = e^{-x^2+1} + x.\ (-2x)\ .\ e^{-x^2} + 1$

$= e^{-x^2+1} \left\{ -\ 2x^2 + 1 \right\}$

c) <u>Extremen waarden:</u> <u>Stel</u>: $f'(x) = 0$

$e^{-x^2+1}\ .\ (-2x^2 + 1) = 0$

$e^{-x^2+1} = 0 \quad v \quad -2x^2 + 1 = 0$

$-\ 2x^2 = -1$

$x^2 = \frac{1}{2}$

$x = +\sqrt{\tfrac{1}{2}} \quad v \quad x = -\sqrt{\tfrac{1}{2}}$

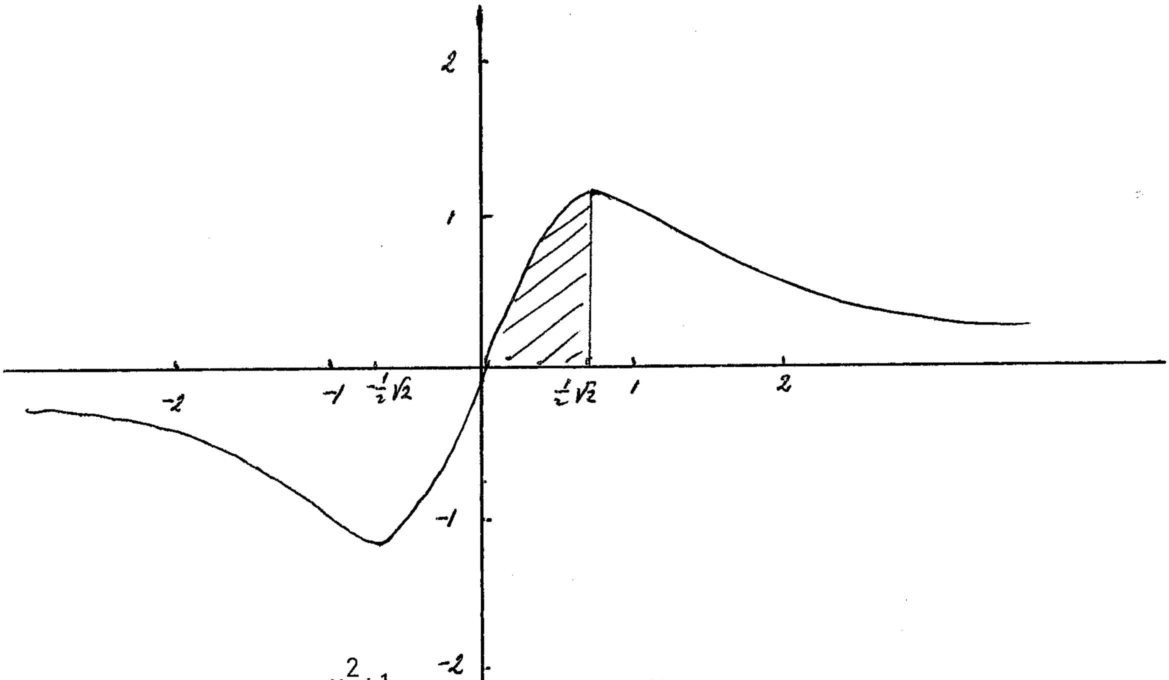
$= +\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \quad v \quad x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$

f'.	−	0	+	0	−
		$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$		$+\frac{1}{2}\sqrt{2}$	

f.	dal.	min	st.	max	dal.
		$-\frac{1}{2}\ \ 2$		$+\frac{1}{2}\ \ 2$	

<u>Minimum voor x =</u> $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$: $f(-\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}.e^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\ .\ \sqrt{e} = -\frac{1}{2}\sqrt{2e} \approx -\ 1,16$

<u>Maximum voor x =</u> $\frac{1}{2}\sqrt{2}$: $f(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}.e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2\ e} \approx 1,16.$



$$\left(\lim_{x \to \infty} x.e^{-x^2+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x^2-1}} = 0 \right)$$

d) <u>Bereken de opp. van het gearceerde vlak:</u>

$$O = \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} f(x)\ .\ dx = \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} x.\ e^{-x^2+1}\ .\ dx$$

Primitieve funktie $\int x\ .\ e^{-x^2+1}.\ dx$ <u>Stel:</u> $g = -x^2+1$

$$\frac{dg}{dx} = -\ 2x$$

$$dx = \frac{dg}{-2x}$$

$$= \int x.\ e^g \frac{dg}{-2x}$$

$$= \int -\tfrac{1}{2} e^g\ .\ dg$$

$$= -\tfrac{1}{2}.e^g + C$$

$$= -\tfrac{1}{2}.\ e^{-x^2+1} + C$$

$$O = \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} x.e^{-x^2+1} = \left[-\tfrac{1}{2}.e^{-x^2+1} \right]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

$$= (-\tfrac{1}{2}\ .e^{\frac{1}{2}}) - (-\tfrac{1}{2}\ e^1)$$

$$= -\ \tfrac{1}{2}\sqrt{e} + \tfrac{1}{2}\ .\ e$$

$$= \tfrac{1}{2}\ (e - \sqrt{e})$$

<u>Voorbeeld 12:</u> $F(x) = \int_0^x \frac{1}{t-1}\,dt$

a) T.b $F(x) = \ln / x - 1 /$

b) Ber. $F(1)$, $F(0)$ en $F(1)-F(0)$

a) $F(x) = \int_0^x \frac{1}{t-1}\,dt$

$= \left[\ln / t-1 /\right]_0^x$

$= \ln / x-1 / - \ln / 0-1 /$

$= \ln / x-1 /$

b) $F(1) = \ln / 1-1 / = \ln 0$: bestaat niet.

$F(0) = \ln / 0-1 / = \ln + 1: = 0$

$F(1) - F(0)$: bestaat niet want $F(1)$ bestaat niet.

<u>Voorbeeld 13:</u> $f(x) = \ln \frac{x^2}{x-1}$

Gevraagd:
a) Domein
b) Snijpunten met de x-as
c) Extremen en de waarden van x waarvoor ze optreden
d) Grafiek
e) Buigpunten.

<u>Oplossing:</u>

a) $\frac{x^2}{x-1} > 0$

teller :	+	+	0	+	-	+	
			0				
noemer :	-	-	-	0	+	+	
				1			
breuk :	-	-	0	-	∄	+	+
			0		1		

Opl.: $x > 1$

b) <u>Snijpunt x-as:</u> Stel: $f(x) = 0$: $\ln \frac{x^2}{x-1} = 0$

$\frac{x^2}{x-1} = 1$

$x^2 = x - 1$

$x^2 - x+1 = 0$

$D < 0 \Rightarrow$ geen snijpunten.

c) $f'(x) = \dfrac{x-1}{x^2} \cdot \dfrac{2x\ (x-1)\ -x^2}{(x-1)^2} \cdot$

$= \dfrac{x-1}{x^2} \cdot \dfrac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{2x - 2x - x^2}{x^2\ (x-1)}$

$= \dfrac{(x-1)\ .x(x-2)}{x^2\ (x-1)^2}$

$= \dfrac{x-2}{x(x-1)}$

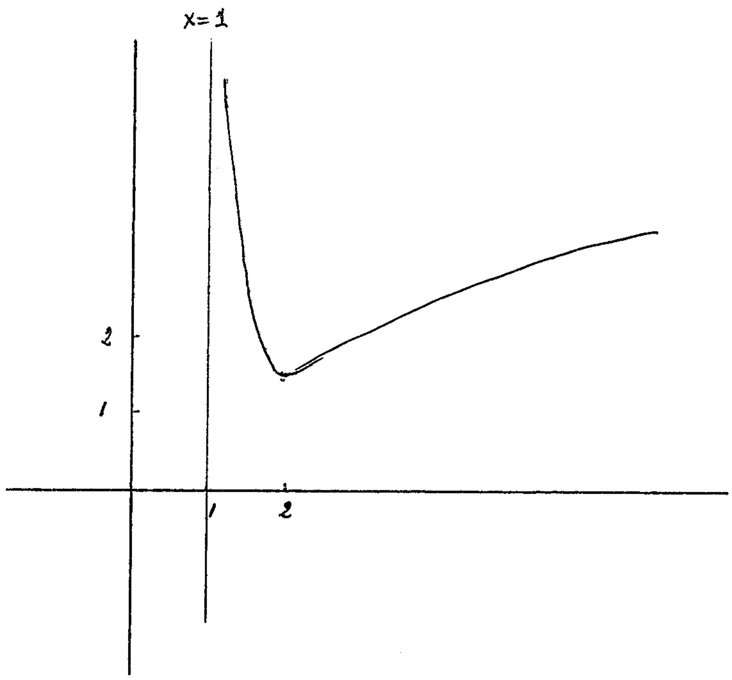
<u>Stel $f'(x) = 0$</u>: $\dfrac{x-2}{x(x-1)} = 0 \qquad x = 2.$

f' 1 | - 0 + + + (x=2)

f 1 | dal min st. (x=2)

<u>Minimum voor $x = 2$</u> $f(2) = \ln \dfrac{4}{2-1} = \ln 4$

d)



e) <u>Buigpunten:</u> $\quad f'(x) = \dfrac{x-2}{x(x-1)} = \dfrac{x-2}{x^2-2}$

$$f''(x) = \frac{1.(x^2-x) - (x-2)\ (2x - 1)}{(x^2 - x)^2}$$

$$= \frac{-x^2 + 4x - 2}{x(x-1)^{\ 2}}$$

<u>Stel:</u> $\quad f''(x) = 0 \qquad -x^2 + 4x - 2 = 0$

$$x_{12} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{-2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{-2}$$

$x = 2 + \sqrt{2} \quad v \quad x = \neq 2 - \sqrt{2}$ vervalt ($<$ 1)

1		$2+\sqrt{2}$	
	+	0	-

<u>Buigpunt voor x =</u> $2 + \sqrt{2}$.