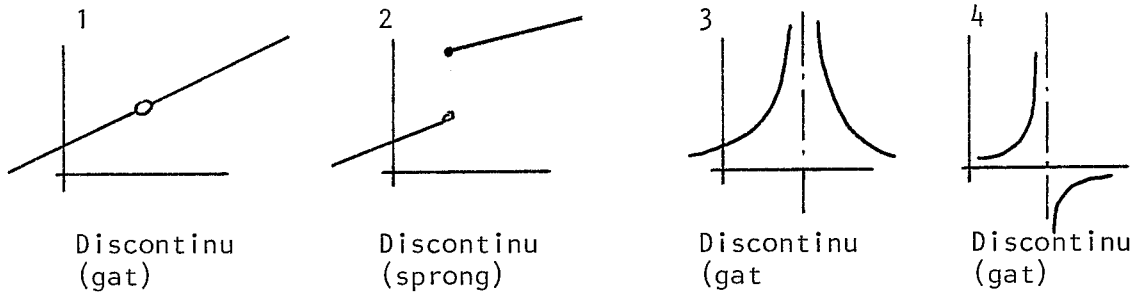


CONTINUITTEIT EN DISCONTINUITTEIT.

We zeggen dat een functie continu is als we de grafiek kunnen tekenen zonder het potlood van het papier te nemen.

Er mogen in de grafiek dus geen gaten of sprongen voorkomen.



Wil een functie continu zijn op een interval I dan zal voor elke $x = a$ (met $a \in I$) $f(a)$ moeten bestaan.

Geval 2 voldoet wel aan bovengenoemde voorwaarde, toch is de functie discontinu (er zit bij $x = a$ een sprong).

In de buurt van $x = a$ moeten de functiewaarden in de buurt van $f(a)$ liggen, wil er tenminste geen sprong zijn.

Tevens moet dus gelden: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ voor elke $x = a \in I$
 zowel voor $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} f(x)$

Voorbeeld 1 $f(x) = \frac{1}{x}$.

- a) Bepaal het domein
- b) Bepaal de vergelijkingen van de asymptoten
- c) Schets de grafiek.

a) $D_f = \{x \mid x \neq 0\}$

b) Horizontale asymptoot: dit is een lijn waar de grafiek op den duur (dus als $x \rightarrow \infty$ of $x \rightarrow -\infty$) langs gaat lopen.

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{x} = 0$ $Y = 0$ is horizontale asymptoot

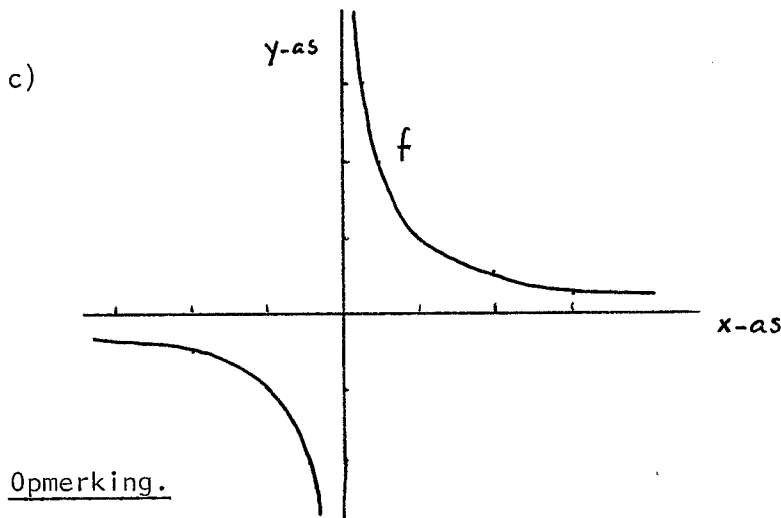
f is discontinu in $x = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ = bestaat niet.

als $x \downarrow 0$ dan $f(x) \rightarrow \infty$

als $x \uparrow 0$ dan $f(x) \rightarrow -\infty$

Dus de Y-as ($x=0$) is vertikale asymptoot.



Opmerking.

De horizontale asymptoot vind je door $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x)$ uit te rekenen.

De verticale asymptoot (bij een gebroken functie) vind je door $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ uit te rekenen.

(In $x = a$ moet $f(x)$ discontinu zijn).

⊆ Als deze limiet niet bestaat dan is er een verticale asymptoot.

Als deze limiet wel bestaat dan is er geen verticale asymptoot.
maar een gat of sprong

Voorbeeld 2 $f(x) = \frac{x-2}{x^2+x-6}$

- Bepaal het domein van f
- Bepaal de vergelijkingen van de asymptoten
- Bereken de snijpunten met de X-as
- Schets de grafiek.

a) $Df = (x / x^2+x-6 \neq 0) \quad x^2+x-6 = 0$
 $(x+3)(x-2) = 0$
 $x = -3 \vee x = 2$

$Df = (x / x \neq -3 \wedge x \neq 2)$.

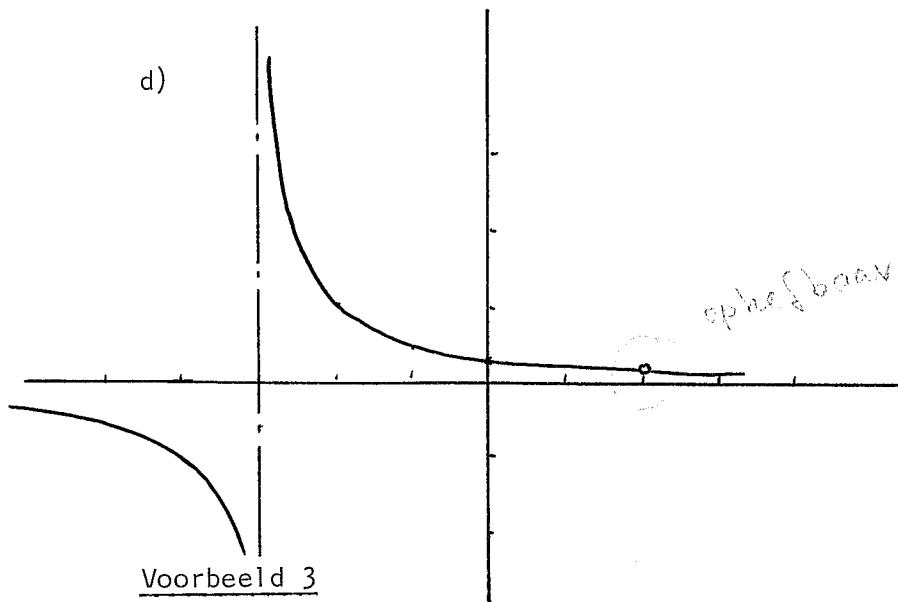
→ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x^2+x-6} = 0 \quad Y = 0$ is horizontale asymptoot.

$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-2}{x^2+x-6} =$ bestaat niet Vertikale asymptoot $x = -3$
 (als $x \downarrow -3$ dan $f(x) \rightarrow \infty$)
 (als $x \uparrow -3$ dan $f(x) \rightarrow -\infty$)

legging

$x \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2+x-6} = x \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+3)} = x \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{5}$. *conclusie een gat met de coördinaten (2, 1/5)*

→ c) $f(x) = 0 \quad \frac{x-2}{(x+2)(x-3)} = 0$
 $x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (vervalt want $x = 2$ behoort niet tot Df)



Gegeven de functie f gedefinieerd door:

$$f: \begin{cases} f(x) = x^2 - x & \text{voor } x \geq 2 \\ f(x) = ax + 4 & \text{voor } x < 2 \end{cases}$$

Bepaal a zodat $f(x)$ is continu.

De discontinuïteit kan optreden voor $x = 2$.

$$f(2) = 2^2 - 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \text{ als } \lim_{x \uparrow 2} f(x) = \lim_{x \downarrow 2} f(x) = f(2).$$

$$a \cdot 2 + 4 = 2$$

$$2a = -2$$

$$a = -1.$$

$$f: \begin{cases} f(x) = x^2 - x & \text{als } x \neq 2 \\ f(x) = \frac{1}{2} & \text{als } x = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

of dat niet

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4$$

gat (2, 4)

niet

ophefbaar

$$f: \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{als } x \neq 2 \\ f(x) = 4 & \text{als } x = 2 \end{cases}$$

Algemeen

Discontinue van functie f in $x = a$ is ophefbaar als men kan definiëren

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Voorbeeld 4)

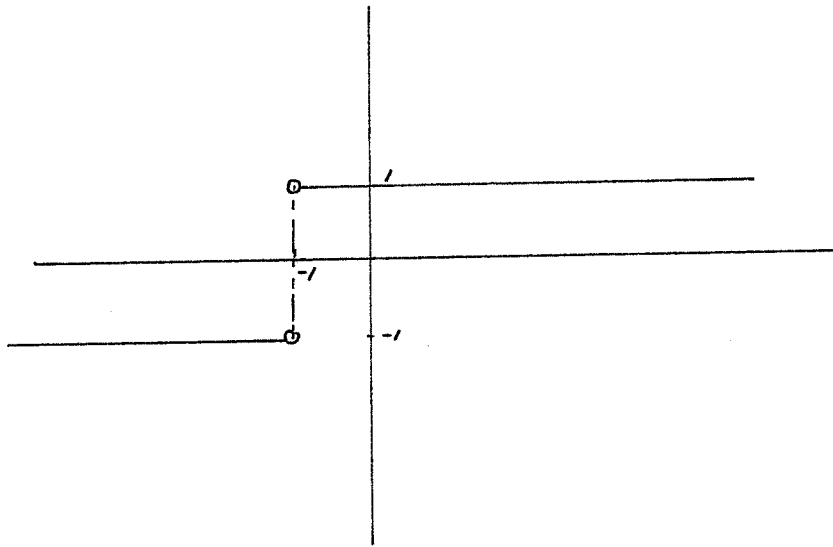
$$f(x) = \frac{x+1}{|x+1|}$$

f is discontinu als: $|x+1| = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$

Grafiek van f: $|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{als } x \geq -1 \quad (x=-1 \text{ mag niet}) \\ -x-1 & \text{als } x < -1 \end{cases}$

$$\underline{x > -1:} \quad f(x) = \frac{x+1}{x+1} = 1$$

$$\underline{x < -1:} \quad f(x) = \frac{x+1}{-(x+1)} = -1$$



Discontinuïteit voor $x = -1$ niet ophefbaar, omdat de grafiek voor $x = -1$ een sprong vertoont.

Voorbeeld 5)

$$f(x) = 2x + 3 + |x + 1|$$

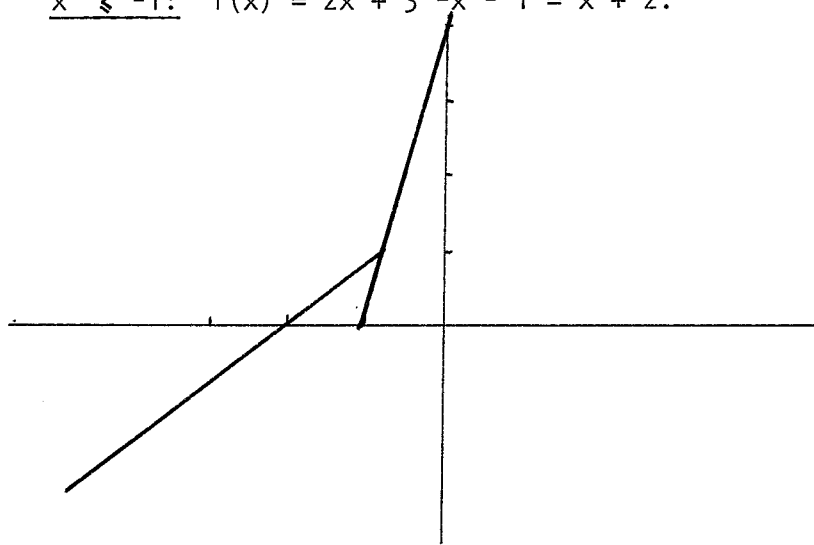
f is voor elk x gedefinieerd.

Grafiek van f :

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{als } x \geq -1 \\ -(x + 1) & \text{als } x \leq -1 \end{cases}$$

$$\underline{x \geq -1}: f(x) = 2x + 3 + x + 1 = 3x + 4.$$

$$\underline{x \leq -1}: f(x) = 2x + 3 - x - 1 = x + 2.$$



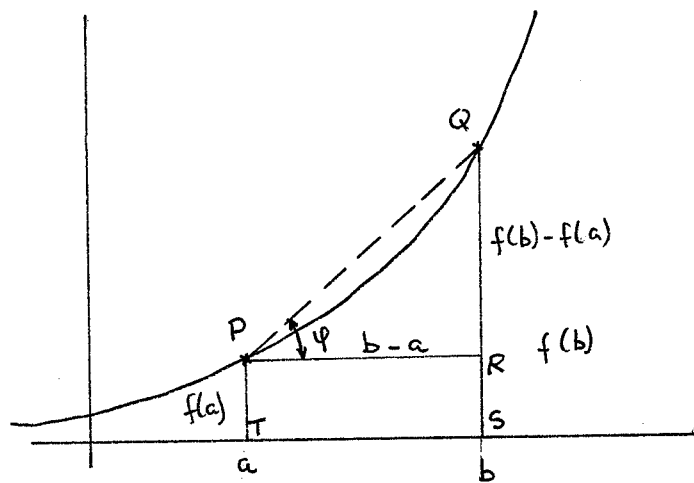
f is continu in \mathbb{R} .

Differentiaalrekening.

Als we van een functie f de grafiek getekend hebben kunnen we hieruit aflezen "waar" en "hoeveel" de grafiek stijgend of dalend is. De mate van stijgen of dalen hangt niet alleen van de functie zelf af maar ook het interval wat we beschouwen.

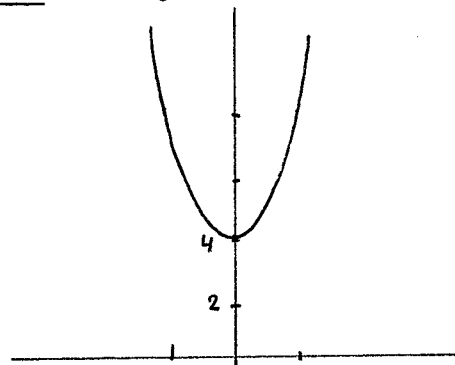
Als we uitgaan van een functie f dan kunnen we op een bepaald interval $\langle a, b \rangle$ de gemiddelde stijging of het differentiequotient bepalen; we verstaan onder het differentiequotient op een interval $\langle a, b \rangle$:

$$\frac{QR}{PR} = \frac{QS - RS}{PR} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \tan \psi \quad \text{Opm.: } b > a$$

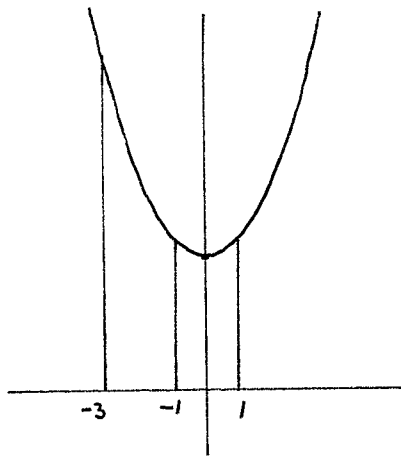


De breuk $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ is een quotiënt van differenties, vandaar de naam differentiequotient.

Voorbeeld 1: Gegeven $f(x) = x^2 + 4$



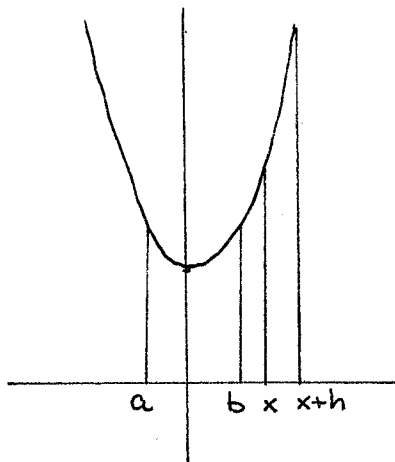
Bereken het differentiequotient op $\langle -3, -1 \rangle$; $\langle -1, 1 \rangle$; $\langle 0, 4 \rangle$;
 $\langle a, b \rangle$ en $\langle x, x + h \rangle$ met $h > 0$



$$\langle -3, -1 \rangle \text{ diff. quotiënt: } \frac{f(-1) - f(-3)}{(-1) - (-3)} = \frac{5 - 13}{-1 - (-3)} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$\langle -1, 1 \rangle \text{ diff. quotiënt: } \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{5 - 5}{2} = 0$$

$$\langle (0, 4) \rangle \text{ diff. quotiënt: } \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{20 - 0}{4} = 5$$



$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle : \text{diff. quotiënt: } & \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^2 + 4 - (a^2 + 4)}{b - a} \\ & = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = b + a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x, x+h \rangle : \text{diff. quot.} : & \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \frac{(x+h)^2 + 4 - (x^2 + 4)}{h} \\ & = \frac{x^2 + 2hx + h^2 + 4 - x^2 - 4}{h} \\ & = \frac{2hx + h^2}{h} = 2x + h \end{aligned}$$

Het differentiequotiënt is een quotiënt van de toename van de funktiewaarde en de bijbehorende toename van het argument x : $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$

We kunnen het differentiequotiënt op elk interval $\langle x, x+h \rangle$ of $\langle x, x+\Delta x \rangle$ uitrekenen.

Voorbeeld: $f(x) = x^2 + 4$

Differentiequotiënt op $\langle x, x+h \rangle$: $2x + h$.

Willen we nu het differentiequotiënt uitrekenen op $\langle -3, -1 \rangle$ dan moet je $x = -3$ en $h = 2$ kiezen.

Het differentiequotiënt is dan: $2 \cdot -3 + 2 = -4$

Op $\langle -1, 1 \rangle$ kies je $x = -1$ en $h = 2$

Het differentiequotiënt wordt dan: $2 \cdot -1 + 2 = 0$

We zien dat als het differentiequotiënt op een interval positief is dat de functie gemiddeld stijgt.

Wat kan het differentiequotiënt voorstellen ?

Voorbeeld: $f(t) = 3t + 5t^2$ (eenparig versnelde beweging)

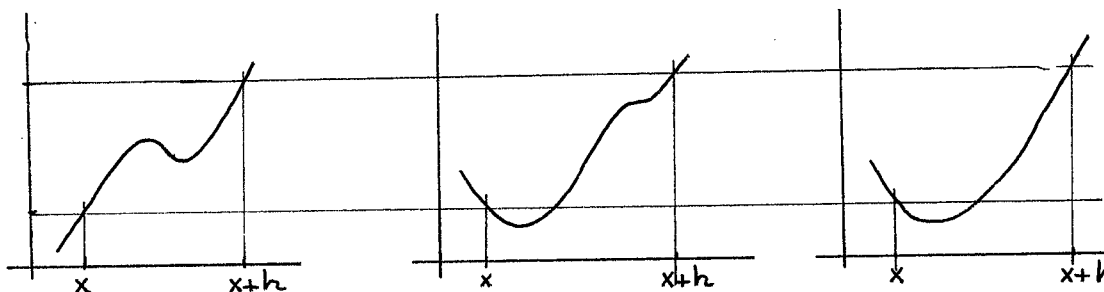
Het differentiequotiënt op $\langle 1,3 \rangle$ is: $\frac{f(3) - f(1)}{3-1} = \frac{54 - 8}{2} = 23$

De eenheid zou kunnen zijn m/sec.

Het differentiequotiënt stelt hier de gemiddelde snelheid voor op het interval $\langle 1,3 \rangle$.

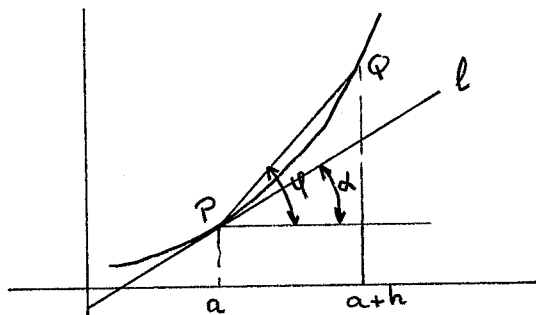
Differentiaalquotiënt.

Zoals bekend zegt het differentiequotiënt op het interval $\langle x, x + h \rangle$ niet of de functie steeds stijgt of steeds daalt.



In bovengenoemde 3 gevallen is het differentiequotiënt op het interval $\langle x, x + h \rangle$ gelijk, terwijl de functies totaal verschillend zijn.

We beschouwen nu een functie f en berekenen het differentiequotiënt op het interval $\langle a, a + h \rangle$ met $h > 0$



Differentiequotiënt: $\tan \varphi = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Indien we $h \downarrow 0$ laten naderen dan nadert de lijn PQ tot de raaklijn l .

De hoek φ nadert tot de hoek α

dus geldt: $\tan \alpha = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Eenzelfde verhaal geldt ook als $h \uparrow 0$

$$\text{Daarom geldt: } \tan \alpha = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Als deze limiet bestaat $\lim_{h \rightarrow 0}$ noemen we de functie differentieerbaar in $x = a$.
Dit getal noemen we het differentiaalquotiënt voor $x = a$.

Voorbeeld 1: Gegeven $f(x) = x^2$

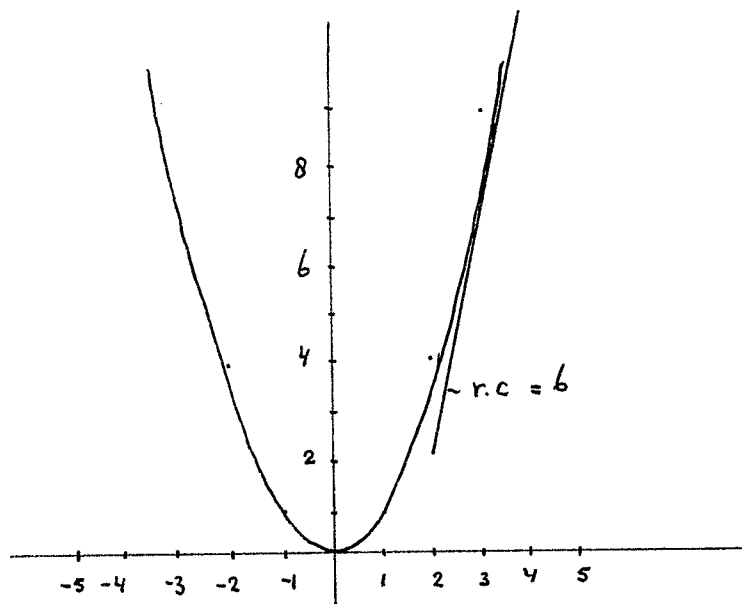
Bereken het differentiaalquotiënt voor $x = 3$, 0 en -5

$$\begin{aligned} \text{Differentiaalquotiënt in } x = 3 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 6 + h = 6 \end{aligned}$$

Dus in het punt van de grafiek met x-coördinaat 3
(het punt (3,9)) heeft de raaklijn een richtingscoëfficiënt 6

$$\text{Differentiaalquotiënt in } x = 0 : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0$$

$$\text{Differentiaalquotiënt in } x = -5 : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-5+h) - f(-5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-10h + h^2}{h} = -10$$



Het differentiaalquotiënt van een functie in $x = a$ hangt dus af van de functie en van de x-waarde.

We kunnen dus bij elke x de bijbehorende richtingscoëfficiënt van de raaklijn bepalen. Doordat bij elke x een richtingscoëfficiënt is te bepalen, kunnen we aldus een functie vormen.

In het punt met argument x (a) geldt dat de richtingscoëfficiënt is: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Deze richtingscoëfficiënt hangt dus af van de keuze van x en is afgeleid van de oorspronkelijke functie. Ze heet daarom afgeleide functie aangeduid door $f'(x)$.

$$\text{Dus } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Voorbeeld 1: Gegeven: $f(x) = x^2 + x - 1$

- Bepaal het differentiequotiënt op $\langle 0, 2 \rangle$
- Bepaal de afgeleide functie.
- Bepaal het differentiaalquotiënt in $x = 3$

a) differentiequotiënt: $\frac{f(2) - f(0)}{2} = \frac{5 - (-1)}{2} = 3$

b) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + x+h-1 - (x^2 + x-1)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2 + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + 1 + h = 2x + 1$

c) 1e manier: m.b.v. de definitie:

differentiaalquotiënt in $x = 3$: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 + 3+h-1 - (3^2 + 3-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h + h^2 + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 7 + h = 7.$$

2e manier: $f'(x) = 2x + 1$

$$f'(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

Samenvatting.

Differentiequotiënt op $\langle a, b \rangle$: $\frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

" (x, x+h) : $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Differentiaalquotiënt in $x = a$: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Afgeleide functie: $f^1(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Dus $f^1(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} =$ differentiaalquotiënt in $x = a$.

Het differentiaalquotiënt in $x = a$ stelt dus voor de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in $x = a$.

Andere schrijfwijze voor $f^1(x)$.

$$f^1(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Boven de deelstreep staat de toename van $f(x)$ als de x waarde met Δx toeneemt.

$$f^1(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{d f}{d x} \quad (\text{Spreek uit: dé-ef dé-iks})$$

I.p.v. $f^1(x)$ schrijven we ook wel y' .

De tweede en volgende afgeleiden schrijven we als volgt:

$$f^2(x) = f''(x) ; f'''(x) = f^3(x)$$

$$y'' ; y'''$$

$$\frac{d^2 f}{d x^2} ; \frac{d^3 f}{d x^3}$$

Voorbeeld: Gegeven $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Bepaal de vergelijking van de raaklijn in $(2, \frac{1}{2}\sqrt{2})$

Oplissing: $f^1(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+h}}{h \sqrt{x} \sqrt{x+h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - (x+h)}{h \sqrt{x} \sqrt{x+h}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+h}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x \sqrt{x+h} + (x+h) \sqrt{x}} = \frac{-1}{x \sqrt{x} + x \sqrt{x}} = \frac{-1}{2x \sqrt{x}}$$

$$f^1(2) = \frac{-1}{2 \cdot 2 \sqrt{2}} = \frac{-1}{4 \sqrt{2}}$$

De vergelijking van de raaklijn is: $Y = a x + b$ $Y = \frac{-1}{4 \sqrt{2}} \cdot x + b$

Lijn door $(2, \frac{1}{2}\sqrt{2})$: $\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{-1}{4\sqrt{2}} \cdot 2 + b$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} = -\frac{1}{4}\sqrt{2} + b \quad b = \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

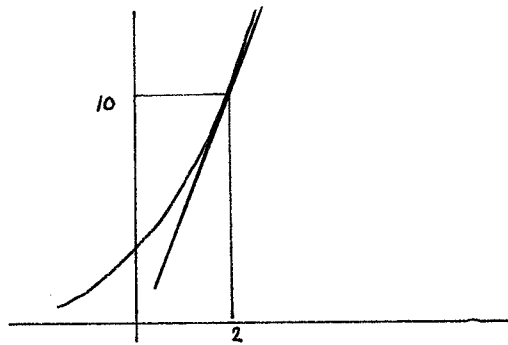
Raaklijn: $Y = -\frac{1}{8}\sqrt{2} x + \frac{3}{4}\sqrt{2}$

2^e manier
quotientregel
 $0 \cdot \sqrt{x} - 1 \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2}$
 $\frac{-1/2 x^{-1/2}}{x} = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$

Voorbeeld: $f(x) = x^3 + x$

$$\begin{aligned} \text{afgeleide functie: } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 + (x+h) - (x^3 + x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3h^2 \cdot x + h^3 + x + h - x^3 - x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3x \cdot h + h + 1) = \underline{\underline{3x^2 + 1}} \end{aligned}$$

Differentiaalquotiënt voor: $x = 2$ $3 \cdot 2^2 + 1 = 13$.



$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + x \\ f'(x) &= 3x^2 + 1 \quad \text{of} \quad \frac{df}{dx} = 3x^2 + 1 \end{aligned} \quad \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{df}{dx} \right)$$

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 1 = 13. \quad \left(\text{of} \quad \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=2} = 13 \right)$$

Standaardafgeleiden. $f'(x) = 0$

I $f(x) = c$

II $f(x) = x^h$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^h - x^h}{h}$$

$$(x+h)^n = \binom{n}{0} x^n \cdot h^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot h^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot h^2 + \binom{n}{n-1} x \cdot h^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 \cdot h^n$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! (n-1)!} = n.$$

$$\binom{5}{1} = \frac{5!}{1! 4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! (n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! (n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \dots + h^2 + \dots + h^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} x^{n-1} n x^{n-1} + h + h^2 = \boxed{n \cdot x^{n-1}}$$

Voorbeeld. $f(x) = x^3$ $f'(x) = \underline{\underline{3x^2}}$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = \underline{\underline{\frac{-1}{x^2}}}$$

$$f(x) = x^0 = f'(x) = 0 \cdot x^{-1} = 0 \quad (\text{afgeleide v.e. constante} = 0)$$

$$\text{III } \boxed{f(x) = c \cdot g(x)}$$

$$f'(x) = c \cdot g'(x) \quad \underline{\text{vb.}} \quad f(x) = 5 \cdot x^2$$

$$f'(x) = 5 (2x) = 10x$$

$$\text{IV } \boxed{f(x) = u(x) + v(x)} \quad (\text{Sommerregel})$$

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) \quad \underline{\text{vb.}} \quad f(x) = x^2 + x \quad f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x - 983$$

$$f'(x) = 2x + 1 \cdot x^0 \quad f(x) = 3x^2 + 6x + 5$$

$$= 2x + 1 \cdot 1$$

$$= 2x + 1.$$

V Produktregel.

$$\boxed{f(x) = u(x) \cdot v(x)}$$

$$\boxed{f = u \cdot v \quad f' = u \cdot v' + v \cdot u'}$$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\underline{\text{vb.}} \quad f(x) = x^2 (x^3 + 5\sqrt{x})$$

$$f'(x) = x^2 (x^3 + 5x^{\frac{1}{2}})$$

$$f'(x) = 2x \cdot (x^3 + 5x^{\frac{1}{2}}) + x^2 (3x^2 + 2\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})$$

$$f'(x) = 2x \cdot (x^3 + 5x) + x^2 (3x^2 + \frac{5}{2\sqrt{x}})$$

$$f(x) = c \cdot x^4$$

$$f'(x) = 0 \cdot x^4 + c \cdot 4x^{4-1} = c \cdot 4 \cdot x^{4-1}$$

$$f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)$$

$$f'(x) = 2x \cdot (x - 1) + (x^2 + 1)(1)$$

$$f'(x) = 2x^2 - 2x + x^2 + 1$$

$$= 3x^2 - 2x + 1$$

VI Quotiëntregel. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ of $f = \frac{u}{v} \quad f' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

Vb. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 3}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^4 + 3) - (x^2 - 1) \cdot 4x^3}{(x^4 + 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 - 2x^5 + 4x^3 + 6x}{(x^4 + 3)^2}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} - x} = \frac{x^{\frac{1}{2}} + x}{x^{\frac{1}{2}} - x}$$

$$f'(x) = \frac{(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 1) \cdot (x^{\frac{1}{2}} - x) - (x^{\frac{1}{2}} + x) \cdot (\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 1)}{(x^{\frac{1}{2}} - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} - x) - (\frac{1}{2} - x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - x)}{(x^{\frac{1}{2}} - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(x^{\frac{1}{2}} - x)^2} = \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - x)^2}$$

=====

VII Kettingregel.

Stel: f is een functie van g : f(g) b.v. f(g) = g²

Stel: g is een functie van x: g(x) b.v. g(x) = x² + 1

Dus f is ook een functie van x nl.: f(x) = (x² + 1)²

$$\frac{df}{dg} = \lim_{\Delta g \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta g}$$

$$\frac{dg}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$\text{Als } \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta g \rightarrow 0$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta g} \times \frac{\Delta g}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta g} \times \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta g \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta g} \times \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

$$\boxed{f'(x) = f'(g) \times g'(x)}$$

$$f(g) = g^2 \quad f'(g) = 2g$$

$$g(x) = x^2 + 1 \quad g'(x) = 2x$$

$$f'(x) = 2 \cdot g \times 2x = 2(x^2 + 1) \cdot 2x \\ = 4x(x^2 + 1)$$

=====

$$\underline{\text{Vb.}} \quad f(x) = \sqrt[5]{x^2 + x + 1} \\ f(x) = (x^2 + x + 1)^{1/5}$$

$$\underline{\text{Stel:}} \quad g = x^2 + x + 1 \quad g'(x) = 2x + 1 \\ f(g) = (g)^{1/5} \quad f'(g) = \frac{1}{5} \cdot g^{-4/5}$$

$$f'(x) = \frac{1}{5} \cdot g^{-4/5} \cdot 2x + 1 = \frac{1}{5 \sqrt[5]{g^4}} \cdot 2x + 1$$

$$= \frac{2x + 1}{5 \sqrt[5]{(x^2 + x + 1)^4}}$$

2e DEELEXAMEN.

Afgeleiden van goniometrische functies.

$$\begin{aligned}
 f(x) = \sin x \quad f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x+\frac{1}{2}h) \cdot \sin \frac{1}{2}h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+\frac{1}{2}h) \cdot \sin \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x+\frac{1}{2}h) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} \\
 &= \cos x \cdot 1 \quad \boxed{f'(x) = \cos x}
 \end{aligned}$$

$$f(x) = \cos x \quad \rightarrow \quad f'(x) = \boxed{-\sin x}$$

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x (-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \boxed{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

Voorbeeld 1: $f(x) = \sin^2 x$

$$x \rightarrow \sin x \rightarrow (\sin x)^2$$

$$1 \quad \cos x \quad 2 (\sin x)^1 \quad f'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x$$

Voorbeeld 2: $f(x) = \cos^3 \sqrt[3]{x+1} = (\cos(x+1)^{1/3})^3$

$$x \rightarrow x+1 \rightarrow (x+1)^{1/3} \rightarrow \cos(x+1)^{1/3} \rightarrow (\cos(x+1)^{1/3})^3$$

$$1 \quad 1 \quad 1/3(x+1)^{-2/3} \quad - \sin(x+1)^{1/3} \quad 3(\cos(x+1)^{1/3})^2$$

$$f'(x) = 3(\cos^3(x+1)) \cdot (-\sin^3(x+1)) \cdot \frac{1}{3}(x+1)^{-2/3} \cdot 1 \cdot 1$$

$$= \frac{-(\cos^3 \sqrt[3]{x+1})^2 \cdot \sin^3 \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

Voorbeeld 3: $f(x) = \tan^2(x^2 + 1)$

$$= (\tan(x^2 + 1))^2$$

$$f'(x) = 2(\tan(x^2 + 1))^1 \cdot \frac{1}{\cos^2(x^2 + 1)} \cdot 2x$$

$$= \frac{4x \tan(x^2 + 1)}{\cos^2(x^2 + 1)}$$

Voorbeeld 4: $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos 4x$

$$f'(x) = (\sin^2 x)' \cdot \cos 4x + \sin^2 x \cdot (\cos 4x)'$$

$$g(x) = (\sin x)^2 \quad g'(x) = 2(\sin x)^1 \cdot \cos x$$

$$= 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$h(x) = \cos 4x \quad h'(x) = -\sin 4x \cdot 4$$

$$= -4 \cdot \sin 4x$$

$$f'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 4x + \sin^2 x \cdot (-4 \cdot \sin 4x)$$

$$= 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 4x - 4 \sin^2 x \cdot \sin 4x$$

De afgeleiden van $\ln(x)$ en e^x

$$- f(x) = \ln x \quad \boxed{f'(x) = \frac{1}{x}}$$

$$\begin{aligned} - f(x) &= e^x \\ y &= e^x \\ \ln y &= \ln e^x \\ \ln y &= x \cdot \ln e \\ \ln y &= x \\ x &= \ln y \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \quad \frac{dy}{dx} = y = e^x \quad \boxed{f'(x) = e^x}$$

Voorbeeld 1: $f(x) = e^{2x}$

methode I: Stel: $g(x) = 2x$ $g'(x) = 2$
 $f(g) = e^g$ $f'(g) = e^g$

$$f'(x) = 2e^{2x}$$

=====

methode II: $f(x) = e^{2x}$
 $= (e^x)^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 (e^x)^1 \cdot e^x \\ &= 2 e^x \cdot e^x \\ &= 2 e^{2x} \end{aligned}$$

Voorbeeld 2: $f(x) = e^{3x^2 + 5x - 4}$

Stel: $g(x) = 3x^2 + 5x - 4$ $g'(x) = 6x + 5$

$$f(g) = e^g \quad f'(g) = e^g$$

$$f'(x) = (6x + 5) \cdot e^{3x^2 + 5x - 4}$$

! Algemeen: Als $f(x) = e^{p(x)}$

$$f'(x) = e^{p(x)} \cdot p'(x)$$

Voorbeeld 3: $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ Stel: $g(x) = x^2 + 1$ $g'(x) = 2x$

$$f(g) = \ln g \quad f'(g) = \frac{1}{g}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \\ &= \frac{2x}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Voorbeeld 4: $f(x) = \ln(\sin x)$ Stel: $g(x) = \sin x$ $g'(x) = \cos x$

$$f(g) = \ln g \quad f'(g) = \frac{1}{g}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \underline{\underline{\cotan x.}}$$

! Algemeen: $f(x) = \ln p(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{p(x)} \cdot p'(x) = \frac{p'(x)}{p(x)}$$

Grafieken.

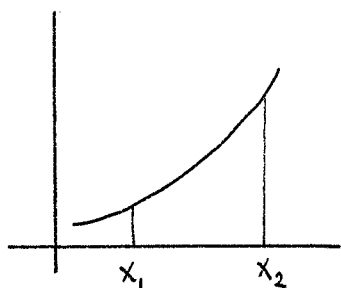
Een functie f heet stijgend op een interval als:

(Voor alle)

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{J}, \text{ met } x_1 < x_2, \text{ geldt } f(x_1) < f(x_2)$$

Functie f heet dalend op het interval als:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{J}, \text{ met } x_1 < x_2, \text{ geldt } f(x_1) > f(x_2)$$



$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

f heet stijgend.

Als $x \in \mathcal{J}$, en $x+h \in \mathcal{J}$ ($h > 0$) dan geldt: $f(x+h) > f(x)$

$$f(x+h) - f(x) > 0$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$$

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$$

Als $x \in \mathcal{J}$, en $x+h \in \mathcal{J}$ ($h < 0$) dan geldt:

$$f(x+h) < f(x)$$

$$f(x+h) - f(x) < 0$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0 \text{ want } f(x+h) - f(x) < 0 \text{ en } h < 0$$

$$\lim_{h \uparrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$$

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0 \quad \text{als } h \text{ positief is}$$

$$\lim_{h \uparrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0 \quad \text{als } h \text{ negatief is.}$$

In het algemeen geldt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$$

Dus $f'(x) > 0$ als $x \in \mathcal{J}$.

Voorbeeld: $f(x) = x^2$ Toon aan dat f stijgend is op $\langle 1, \infty \rangle$

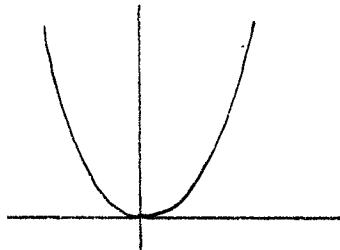
$$f'(x) = 2x$$

$$\text{Als } x \in \langle 1, \infty \rangle \rightarrow f'(x) > 0$$

f stijgend op $\langle 1, \infty \rangle$

Voorbeeld: $f(x) = x^2$

Toon aan m.b.v. de definitie dat f stijgend is op het interval $\langle 1, \infty \rangle$



Kies: $x_1 < x_2$ met $x_1, x_2 \in \langle 1, \infty \rangle$

$$\left. \begin{array}{l} f(x_1) = x_1^2 \\ f(x_2) = x_2^2 \\ x_1 < x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$f =$ stijgend.

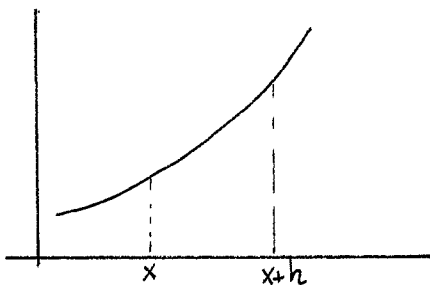
Toon aan dat f op het interval $\langle -1, 2 \rangle$ niet stijgend is.

Kies: $x_1 = -\frac{1}{2}$ $x_2 = \frac{1}{4}$.

$x_1 < x_2$ en $x_1, x_2 \in \langle -1, 2 \rangle$

$$\left. \begin{array}{l} f(x_1) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \\ f(x_2) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} \end{array} \right\} f(x_1) > f(x_2) \quad \underline{\underline{f \text{ niet stijgend.}}}$$

Het verband tussen de grafiek van een functie en de afgeleide.



f stijgend op J

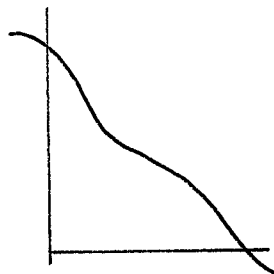
Als f stijgend is, is f' positief.
 Als f positief is, is f stijgend.

Als f dalend is, is f' negatief.
 Als f' negatief is, is f dalend.

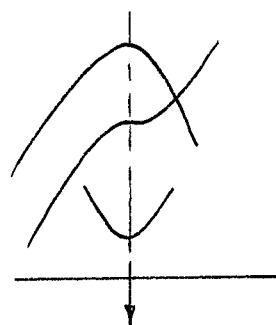
Als de afgeleide nul is ($f' = 0$) loopt de grafiek daar horizontaal;
 dit wil niet zeggen dat er een maximum of een minimum zit.



$f'(x) > 0$

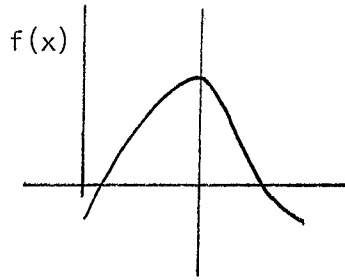


$f'(x) < 0$



$f'(x) = 0$

$$\underline{f'(x) = 0} :$$

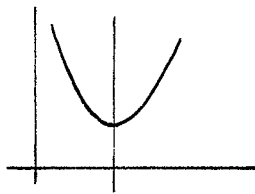


$$\underline{f'(x) \quad \begin{array}{c} \text{++++} \quad \circ \quad \text{----} \\ \hline a \end{array}}$$

max: stijgen \rightarrow dalen.

max: $f'(x)$ wisselt van pos. \rightarrow neg.

$$\underline{\underline{f'(a) = 0}}$$

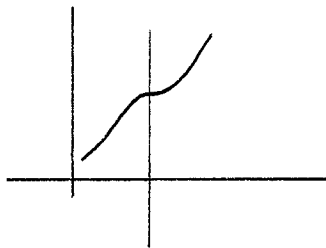


$$\underline{\begin{array}{c} \text{----} \quad \circ \quad \text{++++} \\ \hline a \end{array}}$$

min: dalen \rightarrow stijgen.

min: $f'(x)$ wisselt van neg. \rightarrow pos.

$$\underline{\underline{f'(a) = 0}}$$



$$\underline{\begin{array}{c} \text{++++} \quad \circ \quad \text{++++} \\ \hline a \end{array}}$$

$$f'(a) = 0$$

f' wisselt niet van teken.

In a buigpunt met horizontale raaklijn



$$\underline{\begin{array}{c} \text{----} \quad \circ \quad \text{----} \\ \hline a \end{array}}$$

$$f'(a) = 0$$

f' wisselt niet van teken.

In a buigpunt met horizontale raaklijn

Niet

Voorbeeld 1: $f(x) = x^3 - x$

a) Toon aan dat $f(-x) = -f(x)$

b) Bereken snijpunten met de x-as.

c) Bepaal $f'(x)$ en bereken de lokale extremend) Teken de grafiek van f .Oplissing:

a) $f(x) = x^3 - x$ $-f(x) = -(x^3 - x)$

$f(-x) = -x^3 + x$ $= -x^3 + x$

$f(-x) = -f(x)$

=====

b) $f(x) = 0$: $x^3 - x = 0$

$x(x^2 - 1) = 0$

$x = 0$ v $x^2 = 1$

$x = 1$ v $x = -1$

$x = 0$ v $x = 1$ v $x = -1$

$S_1 = (0,0)$; $S_2 = (-1,0)$;

$S_3 = (1,0)$

Een derdegraadsfunctie kan hoogstens)

3 snijpunten met de x-as hebben.) !

c) $f(x) = x^3 - x$

$f'(x) = 3x^2 - 1$

Stel: $f'(x) = 0$

$3x^2 - 1 = 0$

$x^2 = \frac{1}{3}$

$x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ v $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$

$x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ v $x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

f' + + + + + 0 - - - - - 0 + + + + +

$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

| | | | | | |
|---|-----|---|------|---|-----|
| f | st. | $\frac{\text{max.}}{\frac{1}{3}\sqrt{3}}$ | dal. | $\frac{\text{min.}}{\frac{1}{3}\sqrt{3}}$ | st. |
| | | $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | |

Maximum: Voor $x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ $f\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$

$$= -\frac{1}{9}\sqrt{3} + \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$= \frac{2}{9}\sqrt{3}.$$

=====

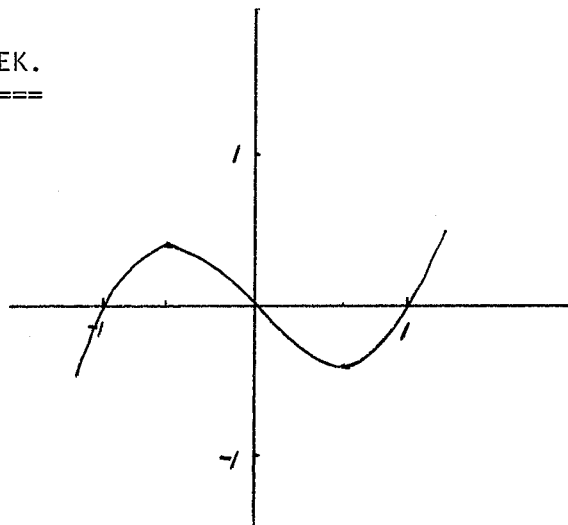
Minimum: Voor $x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ $f\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$

$$= -\frac{2}{9}\sqrt{3}.$$

=====

d) GRAFIEK.

=====



Opmerking: Oplossen van een derdegraadsvergelijking:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$$

Voor welk x geldt $f(x) = 0$:

1e Methode: Probeer een wortel te vinden. (tussen -3 en 3)

$x = 1$ is een wortel.

Als $x = 1$ een wortel is, is $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ deelbaar door $x - 1$

$$x - 1 \mid x^3 - 3x^2 + x + 1 \quad \underline{\underline{\hspace{2cm}}}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 \\ \hline -2x^2 + x + 1 \\ -2x^2 + 2x \\ \hline -x + 1 \\ -x + 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x - 1) (x^2 - 2x - 1)$$

$$f(x) = 0 \quad x - 1 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Wortels: $x = 1 \quad \vee \quad x = 1 + \sqrt{2} \quad \vee \quad x = 1 - \sqrt{2}$.

2e methode: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6$

$$f(x) = x^2 (x-3) - 2 (x-3)$$

$$= (x^2 - 2) (x-3)$$

$$= (x-2) (x+2) (x-3)$$

Wortels: $f(x) = 0 : \quad x = 2 \quad \vee \quad x = -2 \quad \vee \quad x = 3$.

Nul

Voorbeeld 2: Gegeven: $f(x) = \frac{x - 4}{3x + 6}$

- Gevraagd:
- Bepaal Df en Bf
 - Bepaal de vergelijking van de asymptoten.
 - Bepaal de snijpunten met de x-as.
 - Bepaal $f'(x)$
 - Teken de grafiek van f.

Oplossing:

a) Df = ($x \in \mathbb{R} / x \neq -2$) Noemer mag geen nul worden !
 Bf = ($f(x)$ / $f(x) \neq \frac{1}{3}$)

b) Horizontale asymptoot:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x - 4}{3x + 6} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1 - \frac{4}{x}}{3 + \frac{6}{x}} = \frac{1}{3}.$$

Asymptoot: $y = \frac{1}{3}$

Vertikale asymptoot: Noemer nul : $3x + 6 = 0$
 $x = -2$

Asymptoot: $x = -2.$

c) Snijpunten x - as: $f(x) = 0$

$$\frac{x - 4}{3x + 6} = 0 \quad x - 4 = 0$$

$$x = 4. \quad \boxed{S = (4, 0)}$$

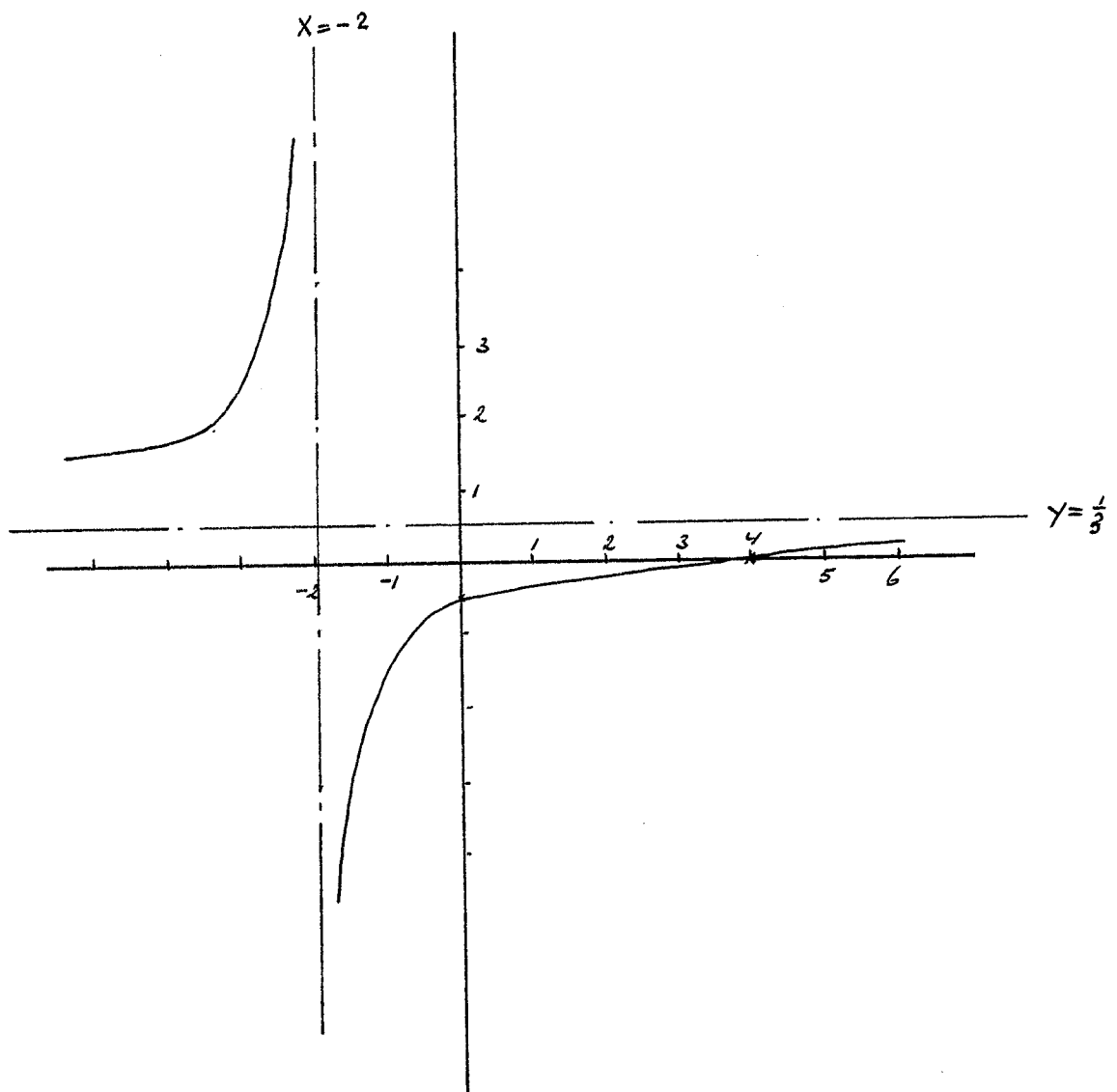
d) $f'(x) = \frac{1(3x + 6) - (x - 4)3}{(3x + 6)^2}$

$$= \frac{18}{(3x + 6)^2}$$

Niel

$$f': \begin{array}{cccccccccccc} + & + & + & + & + & + & + & + & ? & + & + & + & + & + & + & + \\ \hline & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ x & = & -2 & & & & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

f altijd stijgend, behalve voor $x = -2$.



nie!

Voorbeeld 3: Gegeven: $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 + 7x - 4}$.

- Gevraagd:
- Df en Bf
 - Vergelijking asymptoten.
 - Snijpunten met de x-as.
 - $f'(x)$ en wanneer is $f'(x)$ positief en negatief.
 - Bepaal de lokale extremen.
 - Teken de grafiek.
 - Voor welke waarden van x geldt $f(x) \geq \frac{1}{2}$

Oplissing:

a. Df: Stel: $2x^2 + 7x - 4 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{4}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{4}$$

$$x_1 = 1/2 \quad x_2 = -4$$

$$Df = (x \in \mathbb{R} / x \neq -4 \wedge x \neq \frac{1}{2})$$

Bf1 = zie punt f.

b. Vertikale asymptoot:

$$2x^2 + 7x - 4 = 0 \quad x = -4 \quad \vee \quad x = \frac{1}{2}.$$

=====

Horizontale asymptoot:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 + 7x - 4} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}.$$

=====

c. Snijpunten uit x-as: $f(x) = 0$.

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0 \quad x = -3 \quad \vee \quad x = 1$$

$$S_1 = (-3, 0) \quad S_2 = (1, 0)$$

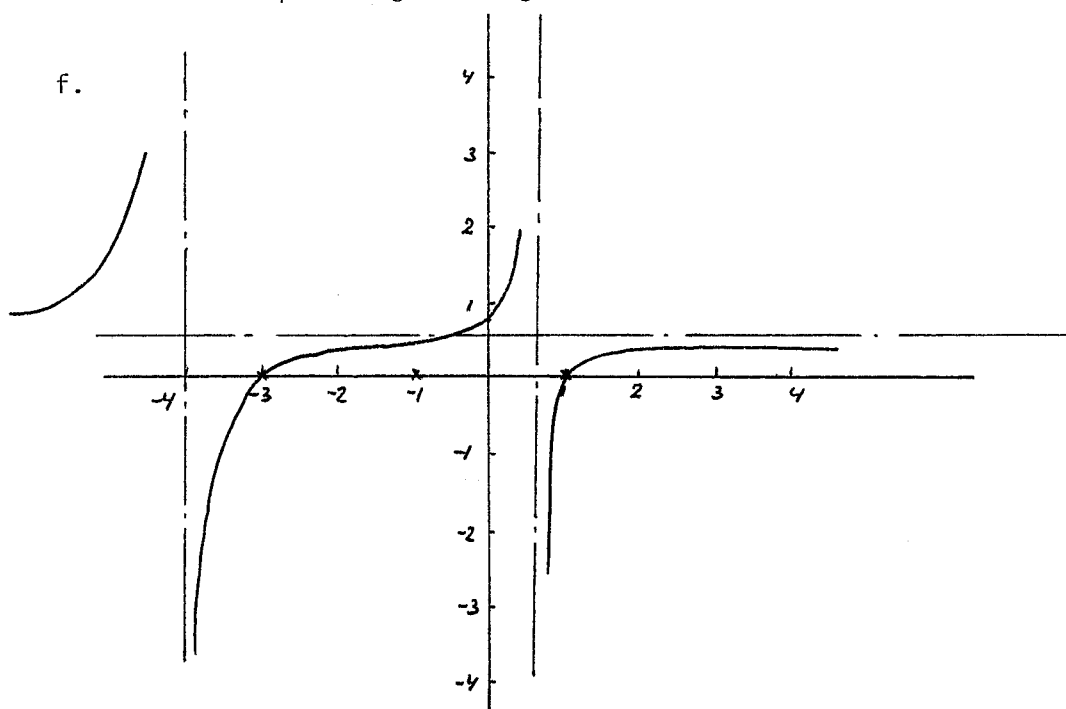
niet

$$\begin{aligned}
 \text{d. } f'(x) &= \frac{(2x-2)(2x^2+7x-4) - (x^2+2x-3)(4x+7)}{(2x^2+7x-4)^2} \\
 &= \frac{3x^2+4x+13}{(2x^2+7x-4)^2}
 \end{aligned}$$

Stel: $f'(x) = 0$: $3x^2 + 4x + 13 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot 13}}{2 \cdot 3} \quad D < 0$$

→ Geen oplossingen → geen lokale extremen.



$$\text{g. } f(x) \geq \frac{1}{2} \quad \frac{x^2+2x-3}{2x^2+7x-4} \geq \frac{1}{2} \quad \frac{2(x^2+2x-3) - (2x^2+7x-4)}{2(2x^2+7x-4)} \geq 0$$

$$\frac{-3x-2}{2(2x^2+7x-4)} \geq 0$$

$$-3x - 2 = 0 \rightarrow x = -2/3$$

$$2x^2 + 7x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{4} = \frac{-7 \pm 9}{4}$$

$$x = -4 \quad \vee \quad x = 1/2$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & + & ? & - & 0 & + & ? & - \\
 & & | & & | & & | & \\
 \hline
 & & -4 & & -2/3 & & 1/2 &
 \end{array}$$

Oplissing: $x < -4 \quad \vee \quad -2/3 \leq x < 1/2$

Voorbeeld 4: Gegeven: $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 7x - 4}$ Gevraagd: zie voorb. 3

a. Df: $2x^2 - 7x - 4 = 0$
 $2x^2 - 8x + x - 4 = 0$
 $2x(x-4) + 1(x-4) = 0$
 $(2x + 1)(x-4) = 0$
 $x = -\frac{1}{2} \vee x = 4.$

Df: $(x \in \mathbb{R} / x \neq -\frac{1}{2} \wedge x \neq 4)$

Bf: $(x \in \mathbb{R})$

b. Asymptoten:

Vertikale asymptoot: $x = -\frac{1}{2}$ en $x = 4.$

Horizontale asymptoot: $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 7x - 4}$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}{2 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

$y = \frac{1}{2}.$

c. Snijpunten van de x-as: $f(x) = 0$ $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x-3)(x+1) = 0$
 $x = 3 \vee x = -1$

$S_1 = (3,0)$ $S_2 = (-1,0)$
=====

$$d. \quad f'(x) = \frac{(2x - 2)(2x^2 - 7x - 4) - (x^2 - 2x - 3)(4x - 7)}{(2x^2 - 7x - 4)^2}$$

$$= \frac{-3x^2 + 4x - 13}{(2x^2 - 7x - 4)^2}$$

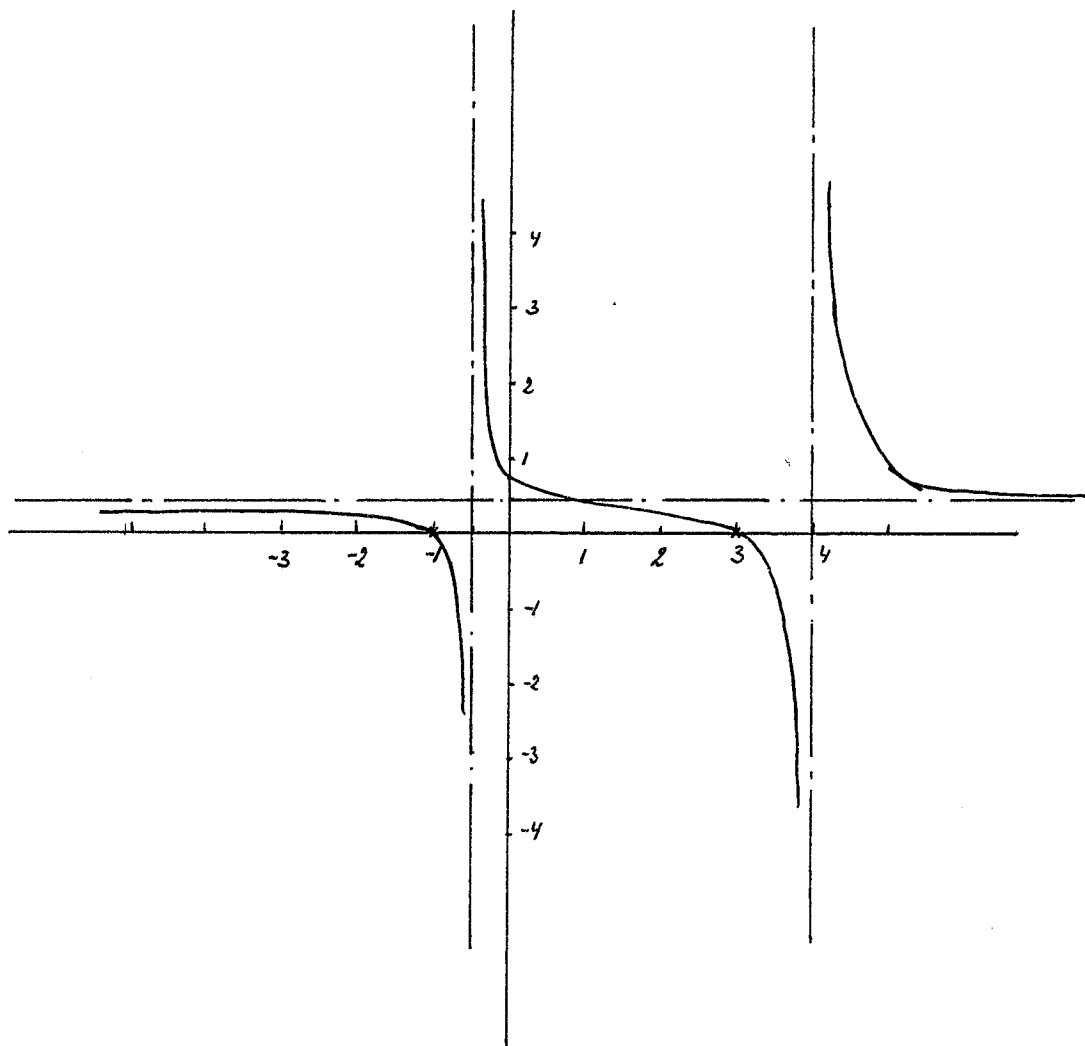
Stel: $f'(x) = 0 \quad -3x^2 + 4x - 13 = 0$

$$D = 16 - 4 \cdot 3 \cdot -13$$

$$D < 0 \quad \text{geen wortels.}$$

$$f'. \quad \begin{array}{c} - \quad \quad ? \quad \quad - \quad \quad ? \quad \quad - \\ \hline \quad \quad -\frac{1}{2} \quad \quad \quad \quad 4 \end{array}$$

$$f. \quad \begin{array}{c} \text{dal.} \quad \quad ? \quad \quad \text{dal.} \quad \quad ? \quad \quad \text{dal.} \\ \hline \quad \quad -\frac{1}{2} \quad \quad \quad \quad 4 \end{array}$$



Voorbeeld 5: $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2}$

- a) Df en Bf
 b) Asymptoten en snijpunten met de x-as
 c) Bepaal de lokale extremen van f en teken de grafiek.
 d) Bepaal $f'(x)$

a. Df: $x^2 + x - 2 = 0$
 $(x+2)(x-1) = 0$
 $x = 2 \vee x = -1$

$$Df = (x \in \mathbb{R} / x \neq 2 \wedge x \neq -1)$$

Bf = zie punt e.

b. Snijpunt x-as: $f(x) = 0 \quad x^2 - 4x + 3 = 0$
 $(x-3)(x-1) = 0$
 $x = 3 \vee x = 1$

$$S_1 = (3,0) \quad ; \quad S_2 = (1,0) \quad \text{vervalt } f(1) \text{ bestaat niet.}$$

Vertikale asymptoot:

noemer nul: $x = -2$
 $x = 1$

Horizontale asymptoot: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2} = 1 \Rightarrow Y = 1$

d. $f'(x) = \frac{(2x-4)(x^2 + x - 2) - (x^2 - 4x + 3)(2x + 1)}{(x^2 + x - 2)^2}$
 $= \frac{5x^2 - 10x + 5}{(x^2 + x - 2)^2} = \frac{5(x^2 - 2x + 1)}{(x^2 + x - 2)^2}$
 $= \frac{5(x-1)^2}{(x^2+x-2)^2}$

e.
$$\frac{+ \quad + \quad ? \quad + \quad + \quad ? \quad + \quad + \quad +}{x = -2 \quad \quad \quad x=1}$$

Dus de funktie f is altijd stijgend.

Voorbeeld 6: $f(x) = \frac{x - 2}{x^2 + 2x - 3}$

a. Df: $x^2 + 2x - 3 = 0$
 $(x + 3)(x - 1) = 0$
 $x = -3 \vee x = 1$

$$Df = (x \in \mathbb{R} / x \neq -3 \quad x \neq +1)$$

$$Bf = (f(x) \in \mathbb{R} / f(x) \geq 0,66 \vee f(x) \leq 0,09)$$

b. Snijpunt met de x-as:

$$f(x) = 0 \quad x - 2 = 0$$

$$x = 2 \quad S = (2, 0)$$

Asymptoten:

Vertikale asymptoot: $x = -3$ en $x = 1$.

Horizontale asymptoot: $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x - 2}{x^2 + 2x - 3} = 0 \Rightarrow y = 0$

c. $f'(x) = \frac{1(x^2 + 2x - 3) - (x - 2)(2x + 2)}{(x^2 + 2x - 3)^2}$

$$= \frac{x^2 + 2x - 3 - 2x^2 - 2x + 4x + 4}{(x^2 + 2x - 3)^2}$$

$$= \frac{-x^2 + 4x + 1}{(x^2 + 2x - 3)^2}$$

Lokale extremen: Stel: $f'(x) = 0 \quad -x^2 + 4x + 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4}}{-2}$$

$$x_1 = 2 + \sqrt{5} \approx 4,2$$

$$x_2 = 2 - \sqrt{5} \approx -0,2.$$

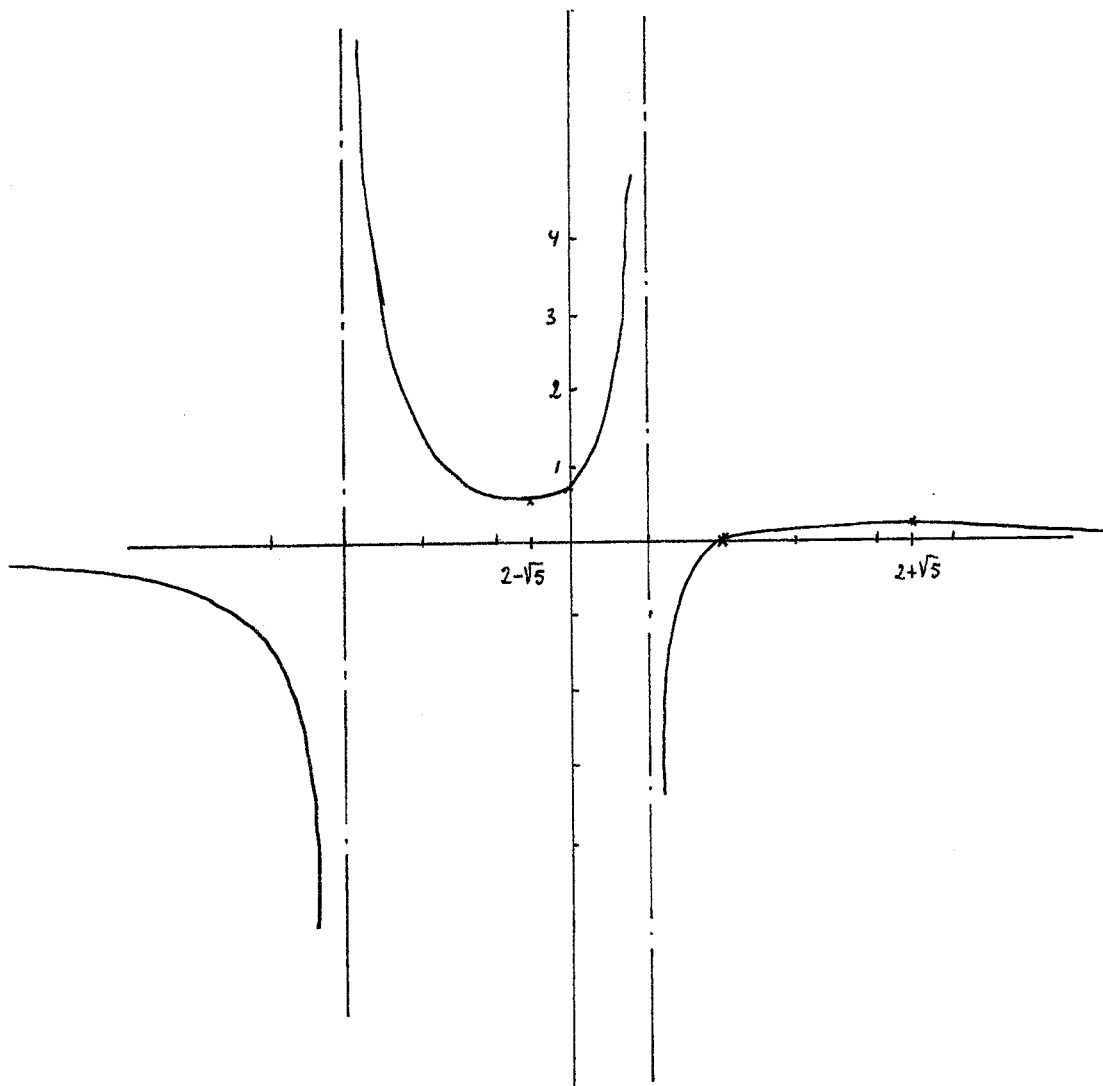
| | | | | | | | | | |
|------|------|--------------|------|-------------------------|-----|---|-----|-------------------------|------|
| f' | - | ? | - | 0 | + | ? | + | 0 | - |
| | -3 | $2-\sqrt{5}$ | 1 | $2+\sqrt{5}$ | | | | | |
| f | dal. | ? | dal. | $\frac{\text{min.}}{0}$ | st. | ? | st. | $\frac{\text{max.}}{0}$ | dal. |
| | -3 | $2-\sqrt{5}$ | 1 | $2+\sqrt{5}$ | | | | | |

Minimum voor $x = 2 - \sqrt{5}$: $f(2 - \sqrt{5}) = \frac{2 - \sqrt{5} - 2}{(2 - \sqrt{5})^2 + 2(2 - \sqrt{5}) - 3}$

$$= \frac{-\sqrt{5}}{10 - 6\sqrt{5}} \approx \underline{\underline{0,65}}$$

Maximum voor $x = 2 + \sqrt{5}$: $f(2 + \sqrt{5}) = \frac{2 + \sqrt{5} - 2}{(2 + \sqrt{5})^2 + 2(2 + \sqrt{5}) - 3} \approx \underline{\underline{0,09}}$

d. Grafiek.



e. Vergelijking van de raaklijn in $(0, 2/3)$:

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 4x - 1}{(x^2 + 2x - 3)^2}$$

$$f'(0) = \frac{1}{9} \quad \text{R.C.}$$

$$\text{Raaklijn} \Rightarrow y = \frac{1}{9}x + b$$

$$\text{Raaklijn door } (0, \frac{2}{3}) : \frac{2}{3} = \frac{1}{9} \cdot 0 + b \quad b = 2/3$$

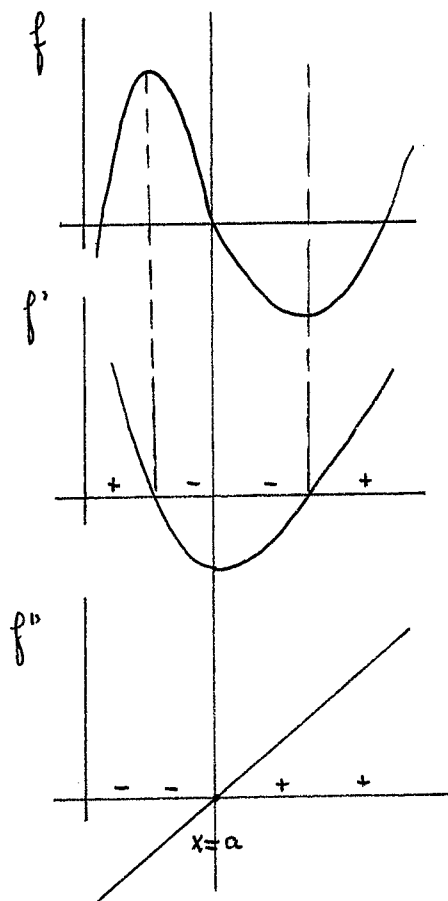
$$y = \frac{1}{9}x + \frac{2}{3}$$

$$\boxed{9y - x - 6 = 0}$$

Buigpunten.

De grafiek van $f'(x)$ heeft voor $x = a$ een buigpunt indien $f''(a) = 0$ en $f''(x)$ voor $x = a$ van teken wisselt.

Een buigpunt is een punt waar de grafiek overgaat van hol naar bol of omgekeerd.



: (3e graadskromme)

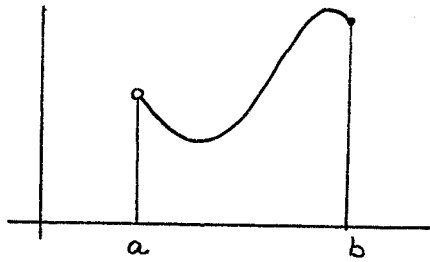
: (2e graadskromme)

: (1e graadskromme)

Lokale extremen - Randextremen.

Indien een functie gegeven is op een gesloten interval, $[a, b]$ dan noemen we de waarden $f(a)$ en $f(b)$ de randextremen. (Indien men de lokale extremen vraagt horen de randextremen erbij).

Gegeven: f op interval $[a, b]$



In $x = b$ treedt een minimum op.

In $x = a$ treedt geen randextreem op.

vriet

Voorbeeld 1: Gegeven: $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 12$

- Gevraagd:
- Volledig origineel van nul.
 - $f'(x)$
 - De lokale extremen.
 - De coördinaten van de buigpunten.
 - Teken de grafiek.

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{a. } f(x) = 0 & \quad f(x) = x^2(x-4) - 3(x-4) \\ & \quad f(x) = (x^2 - 3)(x-4) \\ f(x) = 0 & \quad (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x-4) = 0 \\ x = -\sqrt{3} & \quad \vee \quad x = \sqrt{3} \quad \vee \quad x = 4. \end{aligned}$$

Volledig origineel van 0: $(-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 4)$

Snijpunten x-as: $S(-\sqrt{3}, 0) (\sqrt{3}, 0) (4, 0)$

$$\text{b. } f'(x) = 3x^2 - 8x - 3$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \underline{\text{Stel } f'(x) = 0:} \quad 3x^2 - 8x - 3 &= 0 \\ 3x^2 - 9x + x - 3 &= 0 \\ 3x(x-3) + 1(x-3) &= 0 \\ 3x + 1 = 0 & \quad \vee \quad x - 3 = 0 \\ x = -\frac{1}{3} & \quad \vee \quad x = 3 \end{aligned}$$

$$f''(x) = 6x - 8$$

$$\underline{\text{Stel } f''(x) = 0:} \quad 6x - 8 = 0$$

$$x = \frac{4}{3}$$

(BP = buigpunt)

| | | | | | |
|-----|-----|-------|--------------|------|-----|
| | st. | max. | BP dalend | min. | st. |
| f | | | | | |
| f' | + | 0 | - | 0 | + |
| ... | | - 1/3 | | 3 | |
| f'' | | - | 0 | + | |
| | | | 4/3 | | |

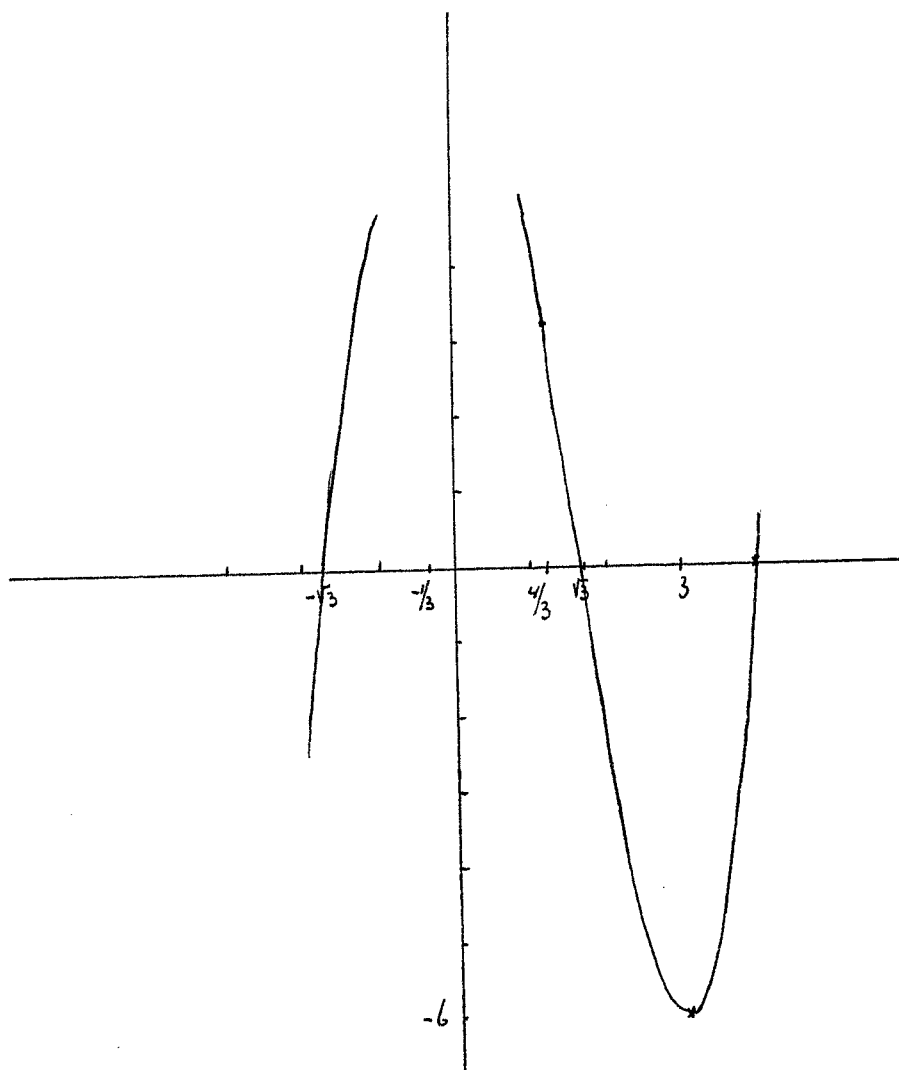
Wert

$$\begin{aligned} \underline{\text{Max:}} \quad f\left(-\frac{1}{3}\right) &= -\frac{1}{27} - 4 \cdot \frac{1}{9} + 3\frac{1}{3} + 12 \\ &= 12 \frac{14}{27}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{Min:}} \quad f(3) &= 27 - 36 - 9 + 12 \\ &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{Buigpunt:}} \quad f\left(\frac{4}{3}\right) &= \frac{64}{27} - \frac{64}{9} - 4 + 12 \\ &= -\frac{128}{27} + 8 \\ &= +3 \frac{7}{27} \end{aligned}$$

$$\text{Buigpunt: } \left(\frac{4}{3}, 3 \frac{7}{27}\right)$$

e. Grafiek:

Wiel

Voorbeeld 2: Gegeven: $f(x) = \cos^2 x - \sin x$ met $x \in [0, 2\pi]$

- Gevraagd:
- Bepaal snijpunten met de x-as
 - Bepaal $f'(x)$ met de lokale extremen.
 - Bepaal de x coördinaten van de buigpunten.
 - Teken de grafiek.
 - Raaklijn in $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2}))$

Oplossing:

a. Snijpunten met de x-as:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 & \quad \cos^2 x - \sin x = 0 \\ & \quad 1 - \sin^2 x - \sin x = 0 \\ & \quad \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$(\sin x)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$\sin x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx -\frac{1}{2} - 1,08 \approx -1,608 \text{ (geen oplossing)}$$

$$\sin x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx -\frac{1}{2} + 1,08 \approx 0,608$$

$$x = 37^\circ = \frac{37}{57} = 0,65 \text{ rad.}$$

$$x = (180-37) = 143^\circ$$

$$= \frac{143}{57} = 2,5 \text{ rad.}$$

b. $f'(x) = -2 \cos x \cdot \sin x - \cos x$

Stel $f'(x) = 0$: $-2 \cos x \cdot \sin x - \cos x = 0$

$$\cos x (-2 \sin x - 1) = 0$$

$$\begin{aligned} \cos x = 0 & \quad \vee \quad -2 \sin x - 1 = 0 \\ x = \frac{1}{2} & \quad \vee \quad x = \frac{3}{2} & \quad \sin x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$x = \frac{7}{6} \pi \text{ (} 210^\circ \text{)}$$

$$\vee x = \frac{11}{6} \pi \text{ (} 330^\circ \text{)}$$

$$f' \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} & - & & + & & - & & + & & - \\ 0 & & \frac{1}{2}\pi & & \frac{7}{6}\pi & & \frac{3}{2}\pi & & \frac{11}{6}\pi & & 2\pi \end{array} \right\}$$

$$f \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} \text{rand} & & \text{min.} & & \text{max.} & & \text{min.} & & \text{max.} & & \text{rand} \\ \text{extr.} & | & \text{dal.} & | & \text{st.} & | & \text{dal.} & | & \text{st.} & | & \text{dal.} & | \\ 0 & & \frac{1}{2}\pi & & \frac{7}{6}\pi & & \frac{3}{2}\pi & & \frac{11}{6}\pi & & 2\pi \end{array} \right\} \text{ extr.}$$

Viel

Minimum: $x = \frac{1}{2} \pi \quad f\left(\frac{1}{2} \pi\right) = -1$

$x = \frac{3}{2} \pi \quad f\left(\frac{3}{2} \pi\right) = +1$

Maximum: $x = \frac{7}{6} \pi : \quad f\left(\frac{7}{6} \pi\right) = \left(-\frac{1}{2} \sqrt{3}\right)^2 - (-0,5) = \frac{5}{4}$

$x = \frac{11}{6} \pi : \quad f\left(\frac{11}{6} \pi\right) = \left(\frac{1}{2} \sqrt{3}\right)^2 - (-0,5)$
 $= \frac{5}{4}.$

Randextremen: $x = 0 \quad f(0) = 1$

$x = 2\pi \quad f(2\pi) = 1$

c. Buigpunten: (x-coördinaten)

$$f'(x) = -2 \sin x \cos x - \cos x$$

$$= -\sin 2x - \cos x$$

$$f''(x) = -\cos 2x \cdot 2 + \sin x$$

$$= -2(1 - 2 \sin^2 x) + \sin x$$

$$= -2 + 4 \sin^2 x + \sin x$$

Stel: $f''(x) = 0 \quad 4 \sin^2 x + \sin x - 2 = 0$

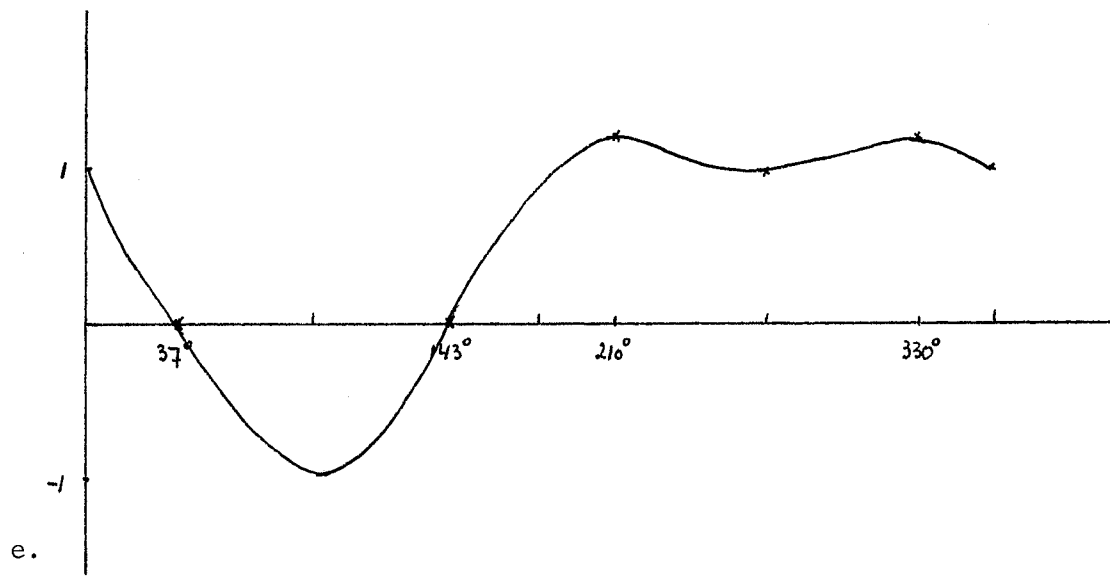
$$(\sin x)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 32}}{8}$$

$$\sin x_1 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8} \sqrt{33} \approx -0,842 \quad x = 237^\circ \quad \vee \quad x = 303^\circ$$

$$\sin x_2 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{33} \approx 0,592 \quad x = 36^\circ \quad \vee \quad x = 144^\circ$$

$$\left. \begin{array}{cccccc} & - & \text{BP} & + & \text{BP} & - & \text{BP} & + & \text{BP} & - \\ & & \varnothing & & \varnothing & & \varnothing & & \varnothing & \\ \circ \} & & 36^\circ & & 144^\circ & & 237^\circ & & 303^\circ & & 360^\circ \end{array} \right\}$$

d. Grafiek.



e.

Voorbeeld 3: Gegeven: $f(x) = \frac{1}{\sin x - \cos x}$ met $x \in [0, 2\pi]$

- Gevraagd: a) Bepaal Df.
 b) Snijpunten met de x-as
 c) Bepaal $f'(x)$ en de extreme waarden
 d) Teken de grafiek.

Oplissing:

a. Df: $f(x)$ bestaat niet als $\sin x - \cos x = 0$

$$\sin x - \cos x = 0$$

$$\sin x = \cos x \quad (\text{of } \cos x = \sin(90 - x))$$

$$(\text{als } \cos x \neq 0:) \quad \frac{\sin x}{\cos x} = 1$$

$$\tan x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{5}{4}\pi \quad (\cos x \neq 0)$$

$$Df = \left\{ x \in [0, 2\pi] \mid x \neq \frac{\pi}{4} \quad x \neq \frac{5}{4}\pi \right\}$$

Bf = zie punt d

$$\text{Asymptoten: } x = \frac{\pi}{4} \text{ en } x = \frac{5}{4}\pi .$$

b. Snijpunten met de x-as:

$$\underline{f(x) = 0:} \quad \text{geen oplossing (want teller } \neq 0)$$

$$c. \quad f'(x) = \frac{0 - 1 \cdot (\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$f'(x)$ bestaat niet als $\sin x - \cos x = 0$; dit is voor $x = \frac{\pi}{4}$ en

$$x = \frac{5}{4}\pi .$$

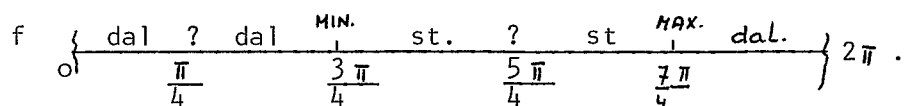
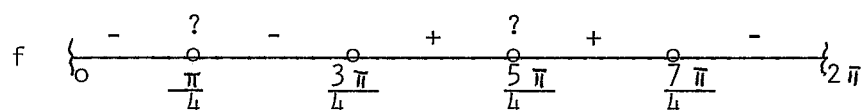
Stel $f'(x) = 0$: $+\cos x + \sin x = 0$

$$\sin x = -\cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -1$$

$$\tan x = -1$$

$$x = \frac{3}{4}\pi \quad \vee \quad x = \frac{7}{4}\pi.$$



Extremen:

Randextremen: $x = 0$ $f(0) = \frac{1}{0-1} = -1$

$$x = 2\pi \quad f(2\pi) = \frac{1}{0-1} = -1.$$

Minimum: $x = \frac{3}{4}\pi$ $f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$

Maximum: $x = \frac{7}{4}\pi$ $f\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \frac{1}{-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}.$

d. Grafiek.

