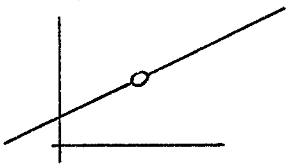
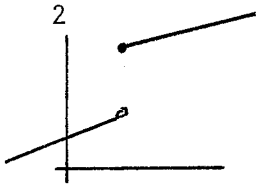
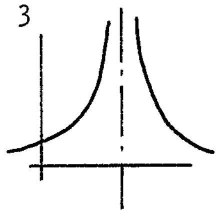
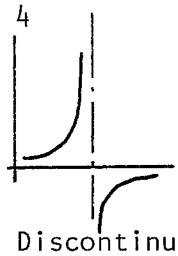
CONTINUÏTEIT EN DISCONTINUÏTEIT.

We zeggen dat een funktie continu is als we de grafiek kunnen tekenen zonder het potlood van het papier te nemen.
Er mogen in de grafiek dus geen gaten of sprongen voorkomen.

1

Discontinu
(gat)

2

Discontinu
(sprong)

3

Discontinu
(gat

4

Discontinu
(gat)

Wil een funktie ontinu zijn op een interval I dan zal voor elke $x = a$ (met $a \in I$) $f(a)$ moeten bestaan.

Geval 2 voldoet wel aan bovengenoemde voorwaarde, toch is de funktie discontinu (er zit bij $x = a$ een sprong).
In de buurt van $x = a$ moeten de funktiewaarden in de buurt van $f(a)$ liggen, wil er tenminste geen sprong zijn.
Tevens moet dus gelden: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ voor elke $x = a \in I$ Zowel voor $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow a} f(x)$

<u>Voorbeeld 1</u> $f(x) = \frac{1}{x}.$

a) Bepaal het domein
b) Bepaal de vergelijkingen van de asymptoten
c) Schets de grafiek.

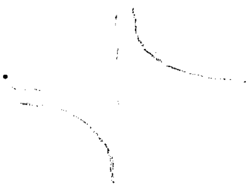
a) $Df = (x \mid x \neq 0)$

b) Horizontale asymptoot: dit is een lijn waar de grafiek op den duur (dus als $x \to \infty$ of $x \to -\infty$) langs gaat lopen.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ $Y = 0$ is horizontale asymptoot

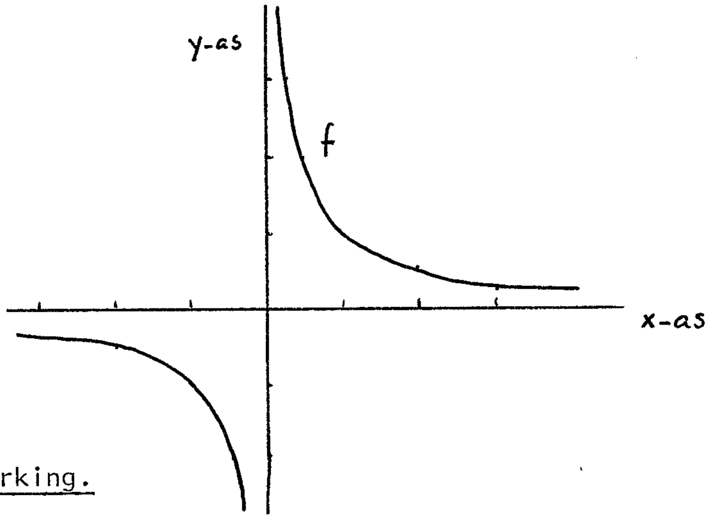
f is discontinu in $x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ = bestaat niet.



als $x \downarrow 0$ dan $f(x) \to \infty$
als $x \uparrow 0$ dan $f(x) \to -\infty$
Dus de Y-as $(x=0)$ is vertikale asymptoot.

c)



Opmerking.

De horizontale asymptoot vind je door $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ uit te rekenen.

De vertikale asymptoot (bij een gebroken funktie) vind je door $\lim_{x \to a} f(x)$ uit te rekenen.

(In $x = a$ moet $f(x)$ discontinu zijn).

Dus bij nadert naar $+\infty$ of $-\infty$ ⇐ Als deze limiet niet bestaat dan is er een vertikale asymptoot.

Als deze limiet wel bestaat dan is er geen vertikale asymptoot.
maar een gat of sprong

Voorbeeld 2 $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+x-6}$.

a) Bepaal het domein van f

b) Bepaal de vergelijkingen van de asymptoten

c) Bereken de snijpunten met de X-as

d) Schets de grafiek.

a) $Df = (x \ / \ x^2+x-6 \neq 0)$

$$x^2+x-6 = 0$$
$$(x+3)\ (x-2) = 0$$
$$x = -3 \quad v \quad x = 2$$

$Df = (x \ / \ x \neq -3 \ \wedge \ x \neq 2)$.

b) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x-2}{x^2+x-6} = 0$ $\quad$ $Y = 0$ is horizontale asymptoot.

$\lim_{x \to -3} \dfrac{x-2}{x^2+x-6} =$ bestaat niet $\quad$ Vertikale asymptoot $x = -3$

(als $x \downarrow -3$ dan $f(x) \to \infty$)

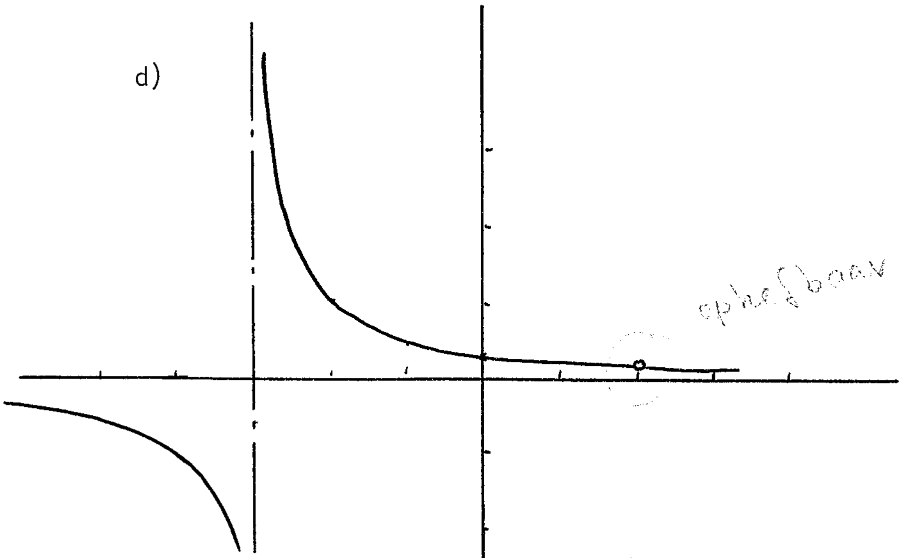
(als $x \uparrow -3$ dan $f(x) \to -\infty$)

$\lim_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2+x-6} = \lim_{x \to 2} \dfrac{x-2}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \to 2} \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{5}$. Conclusie een gat met de coördinaten $(2, 1/5)$

c) $f(x) = 0$ $\quad \dfrac{x-2}{(x+2)(x-3)} = 0$

$x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ $\quad$ (vervalt want $x = 2$ behoort niet tot Df)

d)



$$f: \begin{cases} f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+x-6} \text{ als } x \neq 2 \\ f(x) = \frac{1}{2} \text{ als } x = 2 \end{cases}$$

<u>Voorbeeld 3</u>

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

Gegeven de funktie f gedefinieerd door:

$$f: \begin{cases} f(x) = x^2 - x \text{ voor } x \geqslant 2 \\ f(x) = ax+4 \text{ voor } x < 2 \end{cases}$$

Bepaal a zodat f(x) is continu.

De discontinuïteit kan optreden voor x = 2.

$f(2) = 2^2-2 = 2$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$ als $\lim\limits_{x \uparrow 2} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow 2} f(x). = f(2).$

$$a.2 + 4 = 2$$
$$2a = -2$$
$$a = -1.$$

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{0}{0}$

$\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)} =$

$\lim\limits_{x \to 2} x+2 = 4$

gat (2,4)

niet

opheffbaar

$$f \begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2} \text{ als } x \neq 2 \\ f(x) = 4 \text{ als } x = 2 \end{cases}$$

Algemeen Discontinuïteit van functie f in x = a is opheffbaar als men kan definiëren

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

Voorbeeld 4)

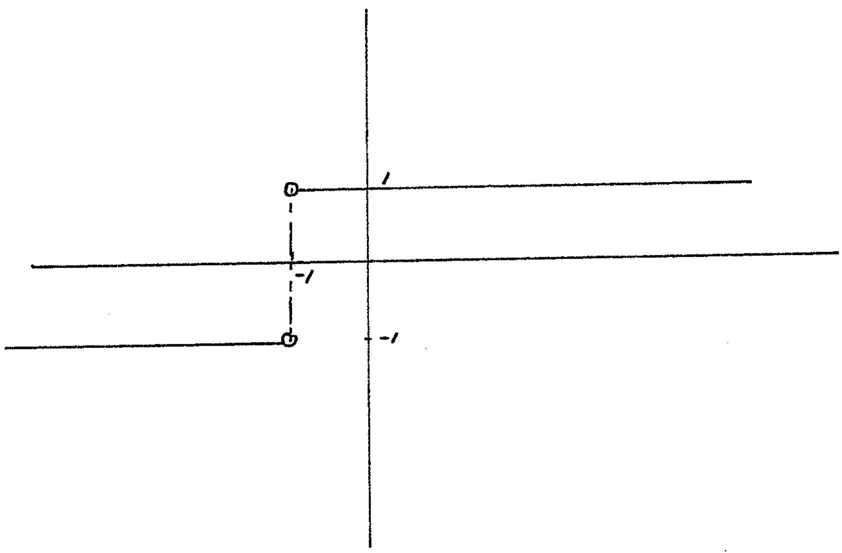
$$f(x) = \frac{x + 1}{|x + 1|}$$

f is discontinu als: $|x + 1| = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

<u>Grafiek van f:</u> $|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{als } x > -1 \\ -x - 1 & \text{als } x < -1 \end{cases}$ (x=- 1 mag niet)

<u>$x > -1$:</u> $f(x) = \dfrac{x + 1}{x + 1} = 1$

<u>$x < -1$:</u> $f(x) = \dfrac{x + 1}{-(x + 1)} = -1$



Discontinuïteit voor $x = -1$ niet ophefbaar, omdat de grafiek voor $x = -1$ een sprong vertoont.

Voorbeeld 5)

$f(x) = 2x + 3 + /x + 1/$

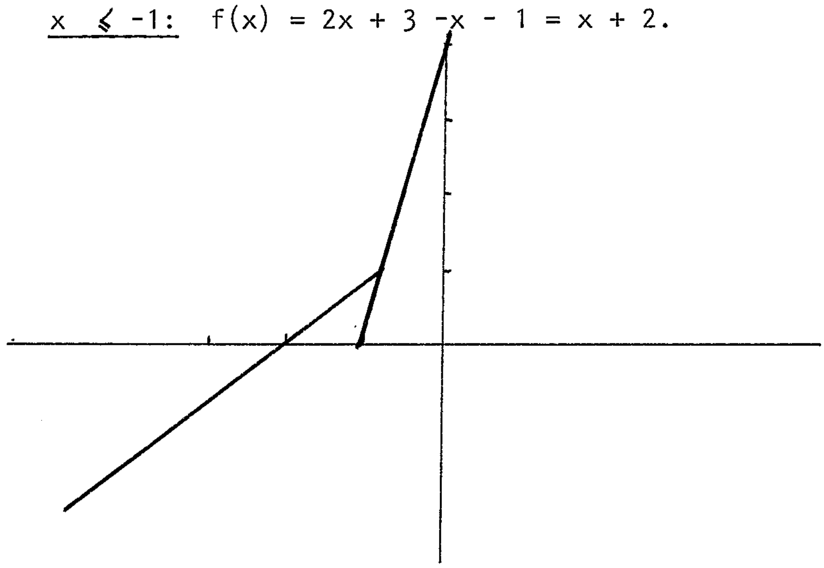
f is voor elk x gedefineerd.

<u>Grafiek van f:</u>

$$/x + 1/ = \begin{cases} x + 1 & \text{als } x \geqslant -1 \\ -(x + 1) & \text{als } x \leqslant -1 \end{cases}$$

<u>$x \geqslant -1$:</u> $f(x) = 2x + 3 + x + 1 = 3x + 4.$

<u>$x \leqslant -1$:</u> $f(x) = 2x + 3 - x - 1 = x + 2.$

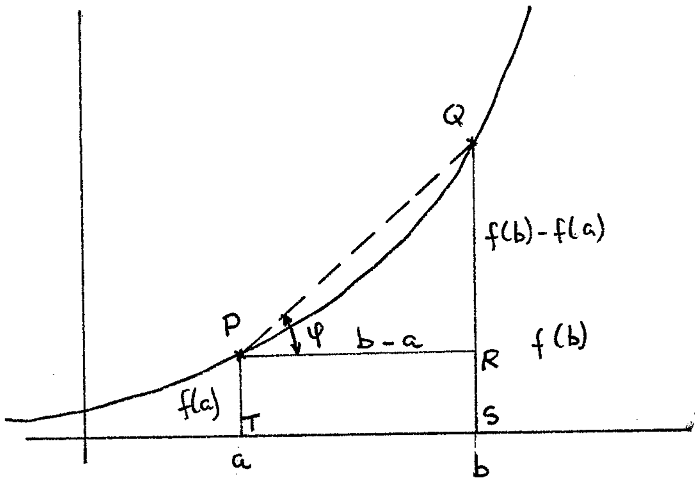


f is continu in R.
==============

Differentiaalrekening.

Als we van een funktie f de grafiek getekend hebben kunnen we hieruit aflezen "waar" en "hoeveel" de grafiek stijgend of dalend is. De mate van stijgen of dalen hangt niet alleen van de funktie zelf af maar ook het interval wat we beschouwen.
Als we uitgaan van een funktie f dan kunnen we op een bepaald interval $\langle a,b \rangle$ de gemiddelde stijging of het differentiequotiënt bepalen; we verstaan onder het differentiequotiënt op een interval $\langle a,b \rangle$:

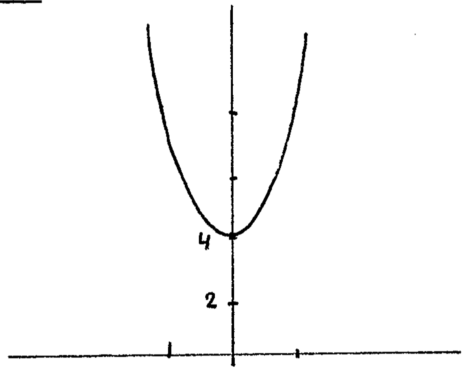
$$\frac{QR}{PR} = \frac{QS - RS}{PR} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \tan \varphi \qquad \text{Opm.: } b > a$$



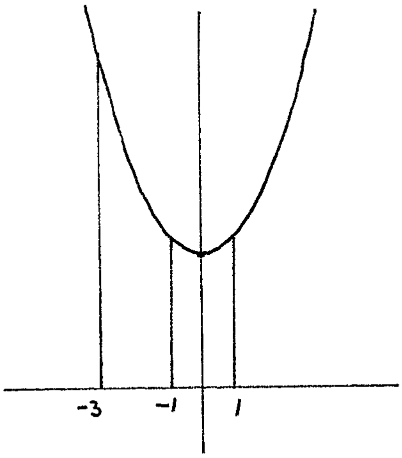
De breuk $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ is een quotiënt van differenties,

vandaar de naam differentiequotiënt.

Voorbeeld 1: Gegeven $f(x) = x^2 + 4$



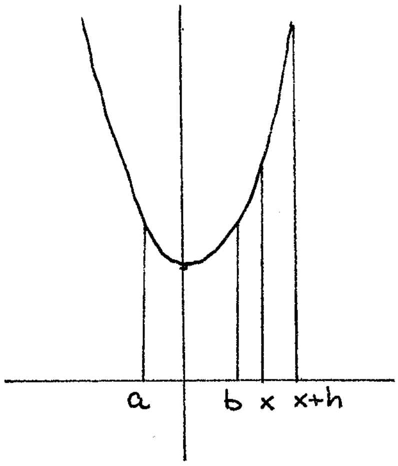
Bereken het differentiequotiënt op $\langle -3, -1 \rangle$; $\langle -1, 1 \rangle$; $\langle 0, 4 \rangle$;
$\langle a, b \rangle$ en $\langle x, x + h \rangle$ met $h > 0$



$\langle -3, -1 \rangle$ diff.quotiënt: $\dfrac{f(-1) - f(-3)}{(-1) - (-3)} = \dfrac{5 - 13}{-1-(-3)} = \dfrac{-8}{2} = -4$

$\langle -1, 1 \rangle$ diff.quotiënt: $\dfrac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \dfrac{5 - 5}{2} = 0$

$\langle (0,4) \rangle$ diff. quotiënt: $\dfrac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \dfrac{20 - 0}{4} = 5$



$\langle a,b \rangle$: diff.quotiënt: $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{b^2 + 4 - (a^2 + 4)}{b - a}$

$$= \frac{b^2 - a^2}{b - a} = b + a$$

$\langle x, x+h \rangle$:diff.quot.: $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{x + h - x} = \dfrac{(x+h^2) + 4 - (x^2 + 4)}{h}$

$$= \frac{x^2 + 2\ hx + h^2 + 4 - x^2 - 4}{h}$$

$$= \frac{2h\ x + h^2}{h} = 2\ x + h$$

Het differentiequotiënt is een quotiënt van de toename van de funktiewaarde en de bijbehorende toename van het argument x: $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$

We kunnen het differentiequotiënt op elk interval $\langle x, x + h \rangle$ of $\langle x, x + \Delta x \rangle$ uitrekenen.

<u>Voorbeeld:</u> $f(x) = x^2 + 4$

Differentiequotiënt op $\langle x, x + h \rangle$: $2x + h$.

Willen we nu het differentiequotiënt uitrekenen op $\langle -3, -1 \rangle$ dan moet je $x = -3$ en $h = 2$ kiezen.

Het differentiequotiënt is dan: $2. -3 + 2 = -4$

Op $\langle -1, 1 \rangle$ kies je $x = 1$ en $h = 2$

Het differentiequotiënt wordt dan: $2. -1 + 2 = 0$

We zien dat als het differentiequotiënt op een interval positief is dat de funktie gemiddeld stijgt.

Wat kan het differentiequotiënt voorstellen ?

<u>Voorbeeld:</u> $f(t) = 3t + 5t^2$ (eenparig versnelde beweging)

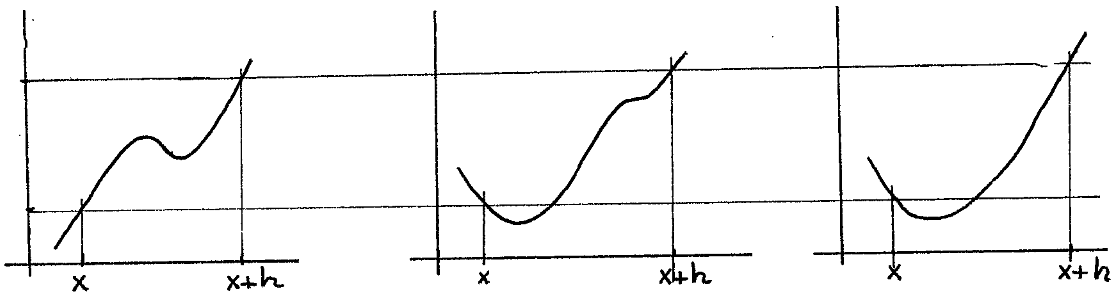
Het differentiequotiënt op $\langle 1,3 \rangle$ is: $\dfrac{f(3) - f(1)}{3-1} = \dfrac{54 - 8}{2} = 23$

De eenheid zou kunnen zijn m/sec.

Het differentiequotiënt stelt hier de gemiddelde snelheid voor op het interval $\langle 1,3 \rangle$.

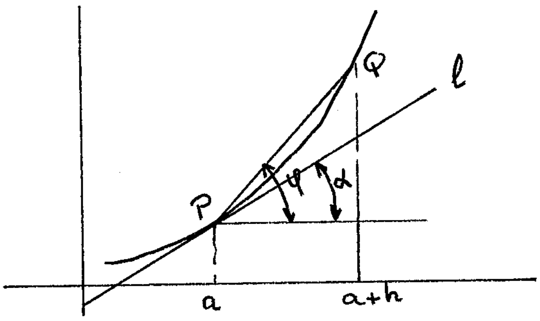
Differentiaalquotiënt.

Zoals bekend zegt het differentiequotiënt op het interval $\langle x, x + h \rangle$ niet of de funktie steeds stijgt of steeds daalt.



In bovengenoemde 3 gevallen is het differentiequotiënt op het interval $\langle x, x + h \rangle$ gelijk, terwijl de funkties totaal verschillend zijn.

We beschouwen nu een funktie f en berekenen het differentiequotiënt op het interval $\langle a, a + h \rangle$ met $h > 0$



Differentiequotiënt: $\tan \varphi = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Indien we $h \downarrow 0$ laten naderen dan nadert de lijn P Q tot de raaklijn ℓ.

De hoek φ nadert tot de hoek α

dus geldt: $\tan \alpha = \lim\limits_{h \downarrow 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Eenzelfde verhaal geldt ook als $h \uparrow 0$

Daarom geldt: $\tan \alpha = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Als deze limiet bestaat noemen we de funktie differentieerbaar in x = a.
Dit getal noemen we het differentiaalquotiënt voor x = a.

<u>Voorbeeld 1</u>: Gegeven $f(x) = x^2$

Bereken het differentiaalquotiënt voor x = 3 , 0 en -5

Differentiaalquotiënt in x = 3 $= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3+h)^2 - 3^2}{h}$

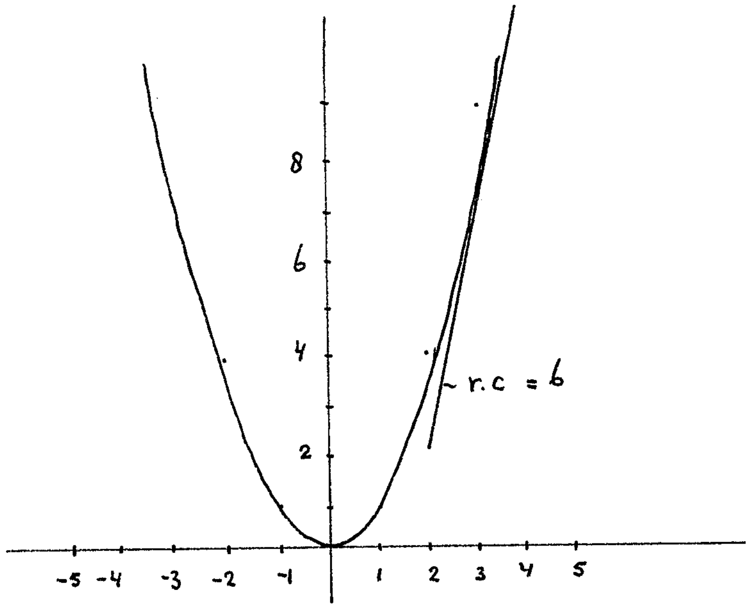
$$= \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 6 + h = 6$$

Dus in het punt van de grafiek met x-coördinaat 3
(het punt (3,9)) heeft de raaklijn een richtingscoëfficient 6

Differentiaalquotiënt in x = 0 : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} h = 0$

Differentiaalquotiënt in x =-5 : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-5+h) - f(-5)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-10h + h^2}{h} = -10$



Het differentiaalquotiënt van een funktie in x = a hangt dus af van de funktie en van de x-waarde.

We kunnen dus bij elke x de bijbehorende richtingscoëfficiënt van de raaklijn bepalen. Doordat bij elke x een richtingscoëfficiënt is te bepalen, kunnen we aldus een funktie vormen.

In het punt met argument x (a) geldt dat de richtingscoëfficiënt is: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Deze richtingscoëfficiënt hangt dus af van de keuze van x en is afgeleid van de oorspronkelijke funktie. Ze heet daarom afgeleide funktie aangeduid door $f'(x)$.

Dus $f^1(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$

<u>Voorbeeld 1:</u> Gegeven: $f(x) = x^2 + x - 1$

a) Bepaal het differentiequotiënt op $\langle 0,2 \rangle$

b) Bepaal de afgeleide funktie.

c) Bepaal het differentiaalquotiënt in $x = 3$

a) differentiequotiënt: $\dfrac{f(2) - f(0)}{2} = \dfrac{5 - (-1)}{2} = 3$

b) $f^1(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim \dfrac{(x+h)^2 + x + h - 1 - (x^2 + x - 1)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2h\,x + h^2 + h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 2x + 1 + h = 2x + 1$

c) <u>1e manier</u>: m.b.v. de definitie:

differentiaalquotiënt in $x = 3$: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3+h)^2 + 3 + h - 1 - (3^2 + 3 - 1)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{6h + h^2 + h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 7 + h = 7.$

2e <u>manier</u>: $f^1(x) = 2x + 1$

$f^1(3) = 2.\ 3 + 1 = 7$

Samenvatting.

Differentiequotiënt op $\langle a,b \rangle$: $\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$

" $(x, x+h)$: $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Differentiaalquotiënt in $x = a$: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Afgeleide funktie: $f^1(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Dus $f^1(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ = differentiaalquotiënt in $x = a$.

Het differentiaalquotiënt in $x = a$ stelt dus voor de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in $x = a$.

Andere schrijfwijze voor $f^1(x)$.

$$f^1(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Boven de deelstreep staat de toename van $f(x)$ als de x waarde met Δx toeneemt.

$$f^1(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{d\,f}{d\,x}$$ (Spreek uit: dé-ef dé-iks)

I.p.v. $f^1(x)$ schrijven we ook wel y'.

De tweede en volgende afgeleiden schrijven we als volgt:

$f^2(x) = f''(x)$; $f'''(x) = f^3(x)$

y'' ; y'''

$\frac{d^2 f}{d x^2}$; $\frac{d^3 f}{d x^3}$

<u>Voorbeeld:</u> Gegeven $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Bepaal de vergelijking van de raaklijn in $(2, \frac{1}{2}\sqrt{2})$

<u>Oplossing:</u> $$f^1(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{h}$$

2e manier quotientregel

$$\frac{0 . \sqrt{x} - 1 . \frac{1}{2}x^{-1/2}}{(\sqrt{x})^2}$$

$$\frac{-\frac{1}{2}x^{-1/2}}{x} = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{(x+h)}}{h\sqrt{x}.\sqrt{x+h}} = \lim_{h \to 0} \frac{x-(x+h)}{h\sqrt{x}.\ \sqrt{x+h}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x\sqrt{x+h} + (x+h)\sqrt{x}} = \frac{-1}{x\sqrt{x} + x\sqrt{x}} = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$f^1(2) = \frac{-1}{2.\ 2\sqrt{2}} = \frac{-1}{4\sqrt{2}} .$$

De vergelijking van de raaklijn is: $Y = a\,x + b$ $\qquad Y = \frac{-1}{4\sqrt{2}} . x + b.$

Lijn door $(2, \frac{1}{2}\sqrt{2})$: $\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{-1}{4\sqrt{2}} . 2 + b$

$\frac{1}{2}\sqrt{2} = -\frac{1}{4}\sqrt{2} + b \qquad b = \frac{3}{4}\sqrt{2}.$

Raaklijn: $Y = -\frac{1}{8}\sqrt{2}\,x + \frac{3}{4}\sqrt{2}$

<u>Voorbeeld:</u> $f(x) = x^3 + x$

afgeleide funktie: $$f^1(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

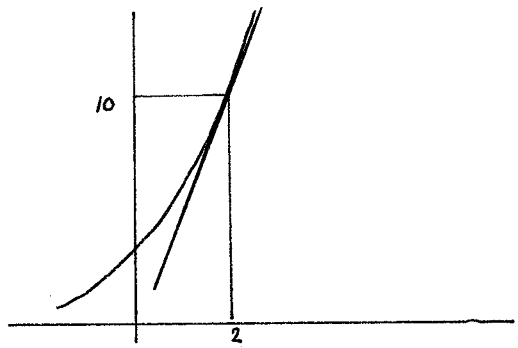
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 + (x+h) - (x^3 + x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3h^2.x + h^3 + x + h - x^3 - x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h \quad 3xh^2 + h^3 + h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3x \, . \, h + h + 1) = \underline{\underline{3x^2 + 1}}$$

<u>Differentiaalquotiënt voor:</u> $x = 2$ $\qquad 3.2^2 + 1 = 13.$



$f(x) = x^3 + 3$ $\qquad \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{df}{dx} \right)$

$f'(x) = 3x^2 + 1$ of $\frac{df}{dx} = 3x^2 + 1$

$f'(2) = 3.2^2 + 1 = 13.$ (of $\frac{(df)}{(dx)}_{x = 2} = 13$)

Standaarafgeleiden. $f^1(x) = 0$

I $\boxed{f(x) = c}$

II $\boxed{f(x) = x^h}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^h - (x^h)}{h}$$

$$(x+h)^n = \binom{n}{0} x^n \cdot h^o + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot h^1 +$$
$$\binom{n}{2} x^{n-2} \cdot h^2 + \binom{n}{n-1} x . h^{n-1} +$$
$$\binom{n}{n} x^o \cdot h^n$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n\,!}{1\,!\,(n-1)\,!} = n.$$

$$\binom{5}{1} = \frac{5\,!}{1\,!\,4\,!} = \frac{1.2.3.4.5}{1.1.2.3.4} = 5$$

$$\binom{n}{o} = \frac{n\,!}{o\,!\,(n-o)!} = \frac{n\,!}{1.n\,!} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n\,!}{n\,!\,(n-n.)\,!} = \frac{n\,!}{n\,!\,-\,o\,!} = 1$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{x^n. + (n \quad).x^{n-1} . h + . - . h^2 + ---- h^3 + .- h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \quad x^{n-} \quad n.x^{n-1} + h + h^2 = \boxed{n.x^{n-1}}$$

Voorbeeld. $f(x) = x^3 \qquad f'(x) = \underline{\underline{3x^2}}$

$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad f'(x) = \frac{1}{2} \; x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \qquad f'(x) = -1.x^{-2} = \underline{\underline{\frac{-1}{x^2}}}$

$f(,) = x^o = \qquad f'(x) = 0.x^{-1} = \underline{\underline{0}}$ (afgeleide v.e. constante = 0)

III $\boxed{f(x) = c.g(x)}$

$f'(x) = c.g^1(x)$ vb. $f(x) = 5.x^2$

$f'(x) = 5\ (2x) = 10\ x$

IV $\boxed{f(x) = u(x) + v(x)}$ (Somregel)

$f'(x) = u'(x) + v'(x)$ vb. $f(x) = x^2 + x$ $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x - 983$

$f'(x) = 2x + 1.x^o$ $f(x) = 3x^2 + 6x + 5$

$= 2x + 1.1$

$= 2x + 1.$

V Produktregel. $\boxed{f(x) = u(x)\ .\ v(x)}$ $\boxed{f = u.v \quad f' = u.v' + v.u'}$

$f'(x) = u'(x)\ .\ v(x) + u(x)\ .\ v'(x)$

Vb. $f(x) = x^2\ (x^3 + 5\sqrt{x})$

$f'(x) = x^2\ (x^3 + 5x^{\frac{1}{2}})$

$f'(x) = 2x\ .\ (x^3 + 5x^{\frac{1}{2}}) + x^2\ (3x^2 + 2\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})$

$f'(x) = \underline{\underline{2x\ .\ (x^3 + 5\ \ x)}} + x^2\ (3x^2 + \frac{5}{2\sqrt{x}})$

$f(x) = c.x^4$

$f'(x) = 0.x^4 + c.4x^{4-1} = \underline{\underline{c.4.x^{4-1}}}$

$f(x) = (x^2 + 1)\ (x - 1)$

$f'(x) = 2x\ .\ (x - 1) + (x^2 + 1)\ (1)$

$f'(x) = 2x^2 - 2x + x^2 + 1$

$= \underline{\underline{3x^2 - 2x + 1}}$

VI <u>Quotiëntregel.</u> $\boxed{f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}}$ of $\boxed{f = \dfrac{u}{v} \qquad f' = \dfrac{v.u' - u.v'}{v^2}}$

$$f'(x) = \frac{u^1(x) \ . \ v(x) - u(x) \ . \ v'(x)}{v(x)^2}$$

<u>Vb.</u> $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^4 + 3}$

$$f'(x) = \frac{2x\ (x^4 + 3) - (x^2 - 1)\ .\ 4x^3}{(x^4 + 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 - 2x^5 + 4x^3 + 6x}{(x^4 + 3)^2}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} - x} = \frac{x^{\frac{1}{2}} + x}{x^{\frac{1}{2}} - x}$$

$$f'(x) = \frac{(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 1)\ .\ (x^{\frac{1}{2}} - x) - (x^{\frac{1}{2}} + x)\ .\ (\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 1)}{(x^{\frac{1}{2}} - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} - x) - (+\frac{1}{2} - x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - x)}{}$$

$$f'(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(x^{\frac{1}{2}} - x)^2} = \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - x)^2}$$

VII <u>Kettingregel.</u>

<u>Stel:</u> f is een funktie van g : f(g) b.v. $f(g) = g^2$

<u>Stel:</u> g is een funktie van x: g(x) b.v. $g(x) = x^2 + 1$

<u>Dus f is ook een funktie van x nl.:</u> $f(x) = (x^2 + 1)^2$

$$\frac{df}{dg} = \lim_{\Delta g \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta g}$$

$$\frac{dg}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Als $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta g \to 0$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta g} \times \frac{\Delta g}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta g} \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta g \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta g} \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

$$\boxed{f'(x) = f'(g) \times g'(x)}$$

$f(g) = g^2 \qquad f'(g) = 2g$

$g(x) = x^2 + 1 \qquad g'(x) = 2x$

$f'(x) = 2.g \times 2x = 2(x^2 + 1) \cdot 2x$

$= 4x\ (x^2 + 1)$

=======

<u>Vb.</u> $f(x) = \sqrt[5]{x^2 + x + 1}$

$f(x) = (x^2 + x + 1)^{1/5}$

<u>Stel:</u> $g = x^2 + x + 1 \qquad g'(x) = 2x + 1$

$f(g) = (g)^{1/5} \qquad f'(g) = \frac{1}{5} \cdot g^{-4/5}$

$$f'(x) = \frac{1}{5} \cdot g^{-4/5} \cdot 2x + 1 = \frac{1 \quad . \ 2x + 1}{5\sqrt[5]{g^4} \quad . \quad 1}$$

$$= \frac{2x + 1}{5\sqrt[5]{(x^2 + x + 1)^4}}$$

2e DEELEXAMEN.

Afgeleiden van goniometrische funkties.

$f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin (x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 \cos (x+\frac{1}{2}h) . \sin .\frac{1}{2}h}{h.}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos (x+\frac{1}{2}h) . \sin \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h.}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos (x+\tfrac{1}{2}h) . \frac{\sin \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}$$

$$= \cos x . 1 \qquad \boxed{f'(x) = \cos x}$$

$f(x) = \cos x \longrightarrow f'(x) = \boxed{-\sin x}.$

$f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)' . \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x . \cos x - \sin x (-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \boxed{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

<u>Voorbeeld 1:</u> $f(x) = \sin^2 x$

$x \longrightarrow \sin x \longrightarrow (\sin x)^2$

$1 \qquad \cos x \qquad 2 (\sin x)^1 \qquad f'(x) = 2 \sin x . \cos x$

Niet

<u>Voorbeeld 2:</u> $f(x) = \cos^3 \sqrt[3]{x+1} = \left(\cos\ (x+1)^{1/3}\right)^3$

$$x \longrightarrow x+1 \longrightarrow (x+1)^{1/3} \longrightarrow \cos\ (x+1)^{1/3} \longrightarrow \left(\cos(x+1)^{1/3}\right)^3$$

$$1 \qquad 1 \qquad 1/3(x+1)^{-2/3} \qquad - \quad \sin(x+1)^{1/3} \qquad 3\left(\cos(x+1)^{1/3}\right)^2$$

$$f'(x) = 3\left(\cos^3\ x+1\right)^2 \ . \ (-\sin^3\ (x+1) . \tfrac{1}{3}(x+1)^{-2/3} \ . \ 1 \ . \ 1$$

$$= \frac{-(\cos\sqrt[3]{x+1})^2 \ . \ \sin\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

<u>Voorbeeld 3:</u> $f(x) = \tan^2 (x^2 + 1)$

$$= \left(\tan\ (x^2 + 1)\right)^2$$

$$f'(x) = 2\ \left(\tan\ (x^2 + 1)\right)^1 \ . \ \frac{1}{\cos^2\ (x^2 + 1)} \ . \ 2x$$

$$= \frac{4x\ \tan\ (x^2 + 1)}{\cos^2(x^2 + 1)}$$

<u>Voorbeeld 4:</u> $f(x) = \sin^2 x \ . \ \cos 4x$

$$f'(x) = (\sin^2 x)' \ . \ \cos 4x + \sin^2 x \ . \ (\cos 4x)'$$

$g(x) = (\sin x)^2 \qquad g'(x) = 2\ (.\sin x)^1 \ . \ \cos x$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = 2 \sin x \ . \ \cos x$

$h(x) = \cos 4x \qquad h'(x) = - \sin 4x \ . \ 4 \ .$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = - 4 \ . \ \sin 4x \ .$

$$f'(x) = 2 \sin x \ . \ \cos x \ . \ \cos 4x + \sin^2 x \ . \ (-4 \ . \ \sin 4x)$$

$$= 2 \sin x \ . \ \cos x \ . \ \cos 4x - 4 \sin^2 x \ . \ \sin 4x \ .$$

$\boxed{\text{De afgeleiden van } \ln(x) \text{ en } e^x}$

- $f(x) = \ln x$ $\boxed{f'(x) = \frac{1}{x}}$

- $f(x) = e^x$

$y = e^x$

$\ln y = \ln e^x$

$\ln y = x.\ln e$

$\ln y = x$

$x = \ln y$

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$ $\frac{dy}{dx} = y = e^x$ $\boxed{f'(x) = e^x}$

<u>Voorbeeld 1:</u> $f(x) = e^{2x}$

methode I: <u>Stel:</u> $g(x) = 2x$ $g'(x) = 2$

$f(g) = e^g$ $f'(g) = e^g$

$$f'(x) = 2e^{2x}$$

methode II: $f(x) = e^{2x}$

$= (e^x)^2$

$f'(x) = 2\ (e^x)^1 .\ e^x$

$= 2\ e^x\ .\ e^x$

$= 2\ e^{2x}$

<u>Voorbeeld 2:</u> $f(x) = e^{3x^2 + 5x - 4}$

<u>Stel:</u> $g(x) = 3x^2 + 5x - 4$ $g'(x) = 6x + 5$

$f(g) = e^g$ $f'(g) = e^g$

$f'(x) = (6x + 5)\ .\ e^{3x^2 + 5x - 4}$

! <u>Algemeen:</u> Als $f(x) = e^{p(x)}$

$f'(x) = e^{p(x)}\ .\ p'(x)$

niet.

Voorbeeld 3: $f(x) = \ln (x^2 + 1)$ Stel: $g(x) = x^2 + 1$ $g'(x) = 2x$

$f(g) = \ln g$ $f'(g) = \frac{1}{g}$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x$$

$$= \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Voorbeeld 4: $f(x) = \ln (\sin x)$ Stel: $g(x) = \sin x$ $g'(x) = \cos x$

$f(g) = \ln g$ $f'(g) = \frac{1}{g}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \text{co-tan } x.$$

! Algemeen: $f(x) = \ln p(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{p(x)} \cdot p'x) = \frac{p'(x)}{p(x)}$$

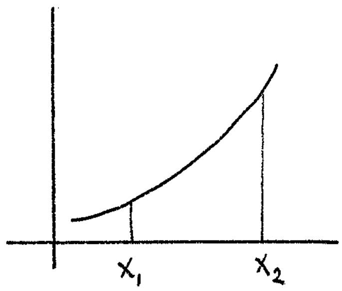
Grafieken.

Een funktie f heet stijgend op een interval als:
(Voor alle)

$$\boxed{\forall \; x_1, x_2 \in \mathfrak{I} \;, \text{ met } x_1 < x_2 \;, \text{ geldt } f(x_1) < f(x_2)}$$

Funktie f heet dalend op het interval als:

$$\boxed{\forall \; x_1, x_2 \in \mathfrak{I} \;, \text{ met } x_1 < x_2 \;, \text{ geldt } f(x_1) > f(x_2)}$$



$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

f heet stijgend.

Als $x \in \mathfrak{I}$, en $x + h \in \mathfrak{I}$ $(h > 0)$ dan geldt: $f(x+h) > f(x)$

$$f(x+h) - f(x) > 0$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$$

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$$

Als $x \in \mathfrak{I}$, en $x + h \in \mathfrak{I}$ $(h < 0)$ dan geldt:

$$f(x+h) < f(x)$$

$$f(x+h) - f(x) < 0$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0 \quad \text{want } f(x+h) - f(x) < 0 \text{ en } h < 0$$

$$\lim_{h \uparrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$$

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0 \quad \text{als } h \text{ positief is}$$

$$\lim_{h \uparrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0 \quad \text{als } h \text{ negatief is.}$$

In het algemeen geldt:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$$

Dus $f'(x) > 0$ als $x \in \mathfrak{I}$.

<u>Voorbeeld:</u> $f(x) = x^2$ Toon aan dat f stijgend is op $\langle 1,\infty \rangle$

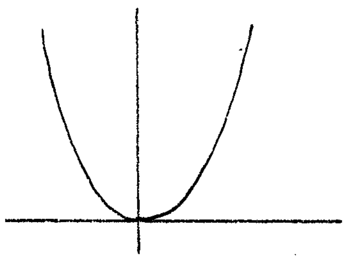
$f'(x) = 2x$

Als $x \in \langle 1,\infty\rangle \rightarrow f'(x) > 0$

f stijgend op $\langle 1,\infty \rangle$

<u>Voorbeeld:</u> $f(x) = x^2$

Toon aan m.b.v. de definitie dat f stijgend is op het interval $\langle 1,\infty \rangle$



<u>Kies:</u> $x_1 < x_2$ met $x_1, x_2 \in \langle 1,\infty \rangle$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1) = x_1^2 \\ f(x_2) = x_2^2 \\ x_1 < x_2 \end{array}\right) \quad x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

f = stijgend.

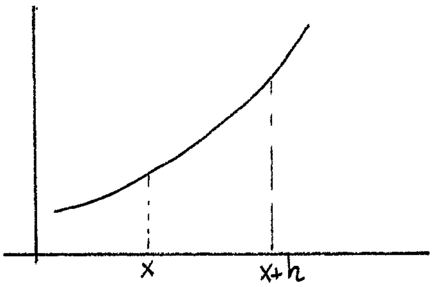
Toon aan dat f op het interval $\langle -1,2 \rangle$ niet stijgend is.

<u>Kies:</u> $x_1 = -\frac{1}{2}$ $\qquad x_2 = \frac{1}{4}.$

$x_1 < x_2$ en $x_1, x_2 \in \langle -1,2 \rangle$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}. \\ f(x_2) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}. \end{array}\right\} f(x_1) > f(x_2) \qquad \underline{\underline{f \text{ niet stijgend.}}}$$

Het verband tussen de grafiek van een funktie en de afgeleide.



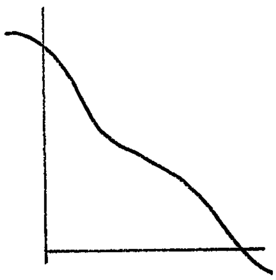
f stijgend op J

Als f stijgend is, is f' positief.
Als f positief is, is f stijgend.

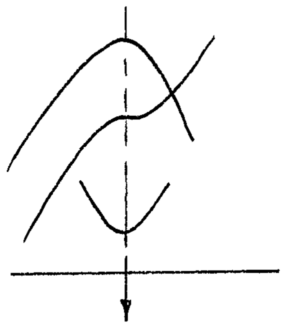
Als f dalend is, is f' negatief.
Als f' negatief is, is f dalend.

Als de afgeleide nul is ($f' = 0$) loopt de grafiek daar horizontaal; dit <u>wil niet zeggen</u> dat er een maximum of een minimum zit.

$f'(x) > 0$

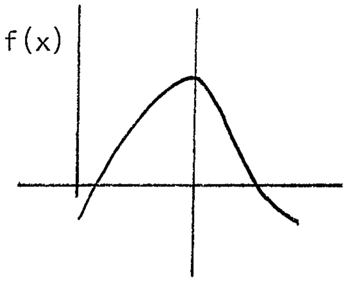


$f'(x) < 0$



$f'(x) = 0$

f'(x) = 0 :



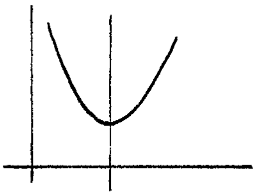
max: stijgen → dalen.

f'(x) ++++ 0 ----

a

max: f'(x) wisselt van pos.→ neg.

f'(a) = 0



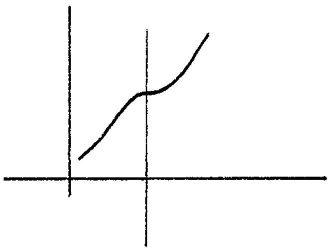
min: dalen → stijgen.

---- o ++++

a

min: f'(x) wisselt van neg.→ pos.

f'(a) = 0



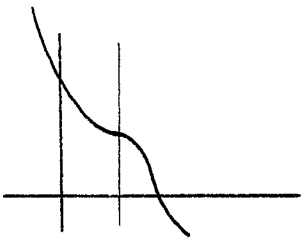
f'(a) = 0

f' wisselt niet van teken.

In a buigpunt met horizontale raaklij

++++ o ++++

a



f'(a) = 0

f' wisselt niet van teken.

In a buigpunt met horizontale raaklij

----o ---

a

Niet

<u>Voorbeeld 1:</u> $f(x) = x^3 - x$

a) Toon aan dat $f(-x) = -f(x)$
b) Bereken snijpunten met de x-as.
c) Bepaal $f'(x)$ en bereken de lokale extremen
d) Teken de grafiek van f.

<u>Oplossing:</u>

a) $f(x) = x^3 - x$ $\qquad -f(x) = -(x^3 - x)$

$f(-x) = -x^3 + x \qquad = -x^3 + x$

$$\underline{\underline{f(-x) = -f(x)}}$$

b) $f(x) = 0$: $\quad x^3 - x = 0$

$x(x^2 - 1) = 0$

$x = 0 \quad v \quad x^2 = 1$

$x = 1 \quad v \quad x = -1$ $\quad \Big) \quad x = 0 \ v \ x = 1 \ v \ x = -1$

$S_1 = (0,0)$; $S_2 = (-1,0)$;

$S_3 = (1,0)$

Een derdegraadsfunktie kan hoogstens 3 snijpunten met de x-as hebben. !

c) $f(x) = x^3 - x$

$f'(x) = 3x^2 - 1$

<u>Stel:</u> $f'(x) = 0$ $\qquad 3x^2 - 1 = 0$

$x^2 = \frac{1}{3}$

$x = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad v \quad x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$

$x = \frac{1}{3}\sqrt{3} \quad v \quad x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

f'	+ + + + +	0 - - - - -	0	+ + + +
		$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	

f	st.	max.	dal.	min.	st.
		$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$		$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	

Niet

Maximum: Voor $x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ $\quad f(-\frac{1}{3}\sqrt{3}) = (-\frac{1}{3}\sqrt{3})^3 - (-\frac{1}{3}\sqrt{3})$

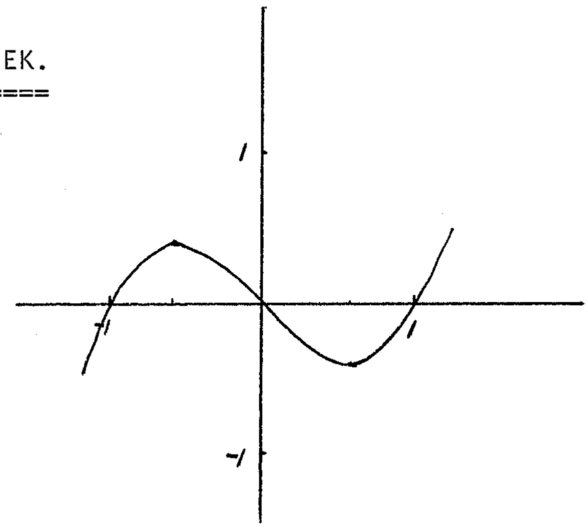
$$= -\frac{1}{9}\sqrt{3} + \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$= \frac{2}{9}\sqrt{3}.$$

Minimum: Voor $x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ $\quad f(\frac{1}{3}\sqrt{3}) = (\frac{1}{3}\sqrt{3})^3 - (\frac{1}{3}\sqrt{3})$

$$= -\frac{2}{9}\sqrt{3}.$$

d) GRAFIEK.



Opmerking: Oplossen van een derdegraadsvergelijking:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$$

Voor welk x geldt $f(x) = 0$:

1e Methode: Probeer een wortel te vinden. (tussen -3 en +3)

$x = 1$ is een wortel.

Als $x = 1$ een wortel is, is $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ deelbaar door $x - 1$

$x - 1 \;/\; x^3 - 3x^2 + x + 1 \;/\; x^2 - 2x - 1$

$\underline{x^3 - x^2}$

$- 2x^2 + x + 1$

$\underline{- 2x^2 + 2x}$

$- x + 1$

$\underline{- x + 1}$

0

Niet

$$f(x) = (x - 1)\,(x^2 - 2x - 1)$$

$$f(x) = 0 \qquad x - 1 = 0 \vee x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x_{1_2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

<u>Wortels:</u> $x = 1 \quad v \quad x = 1 + \sqrt{2} \quad v \quad x = 1 - \sqrt{2}$.

<u>2e methode:</u> $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2\,(x-3) - 2\,(x-3) \\ &= (x^2 - 2)\,(x-3) \\ &= (x-2)\,(x+2)\,(x-3) \end{aligned}$$

<u>Wortels:</u> $f(x) = 0$: $\quad x = 2 \quad v \quad x = -2 \quad v \quad x = 3$.

Nul

Voorbeeld 2: Gegeven: $f(x) = \dfrac{x - 4}{3x + 6}$

Gevraagd: a) Bepaal Df en Bf

b) Bepaal de vergelijking van de asymptoten.

c) Bepaal de snijpunten met de x-as.

d) Bepaal $f'(x)$

e) Teken de grafiek van f.

Oplossing:

a) $Df = (x \in \mathbb{R} \;/\; x \neq -2)$ Noemer mag geen nul worden !

$Bf = (f(x) \;/\; f(x) \neq \frac{1}{3})$

b) Horizontale asymptoot:

$$\lim_{x \to \pm \infty} \frac{x - 4}{3x + 6} = \lim_{x \to \pm \infty} \frac{1 - \frac{4}{x}}{3 + \frac{6}{x}} = \frac{1}{3}.$$

Asymptoot: $y = \frac{1}{3}$

Vertikale asymptoot: Noemer nul : $3x + 6 = 0$

$x = -2$

Asymptoot: $x = -2$.

c) Snijpunten x - as : $f(x) = 0$

$\dfrac{x - 4}{3x + 6} = 0$ $\quad x - 4 = 0$

$x = 4.$ $\boxed{S = (4,0)}$

d) $f'(x) = \dfrac{1\ (3x + 6) - (x - 4)\ 3}{(3x + 6)\ 2}$

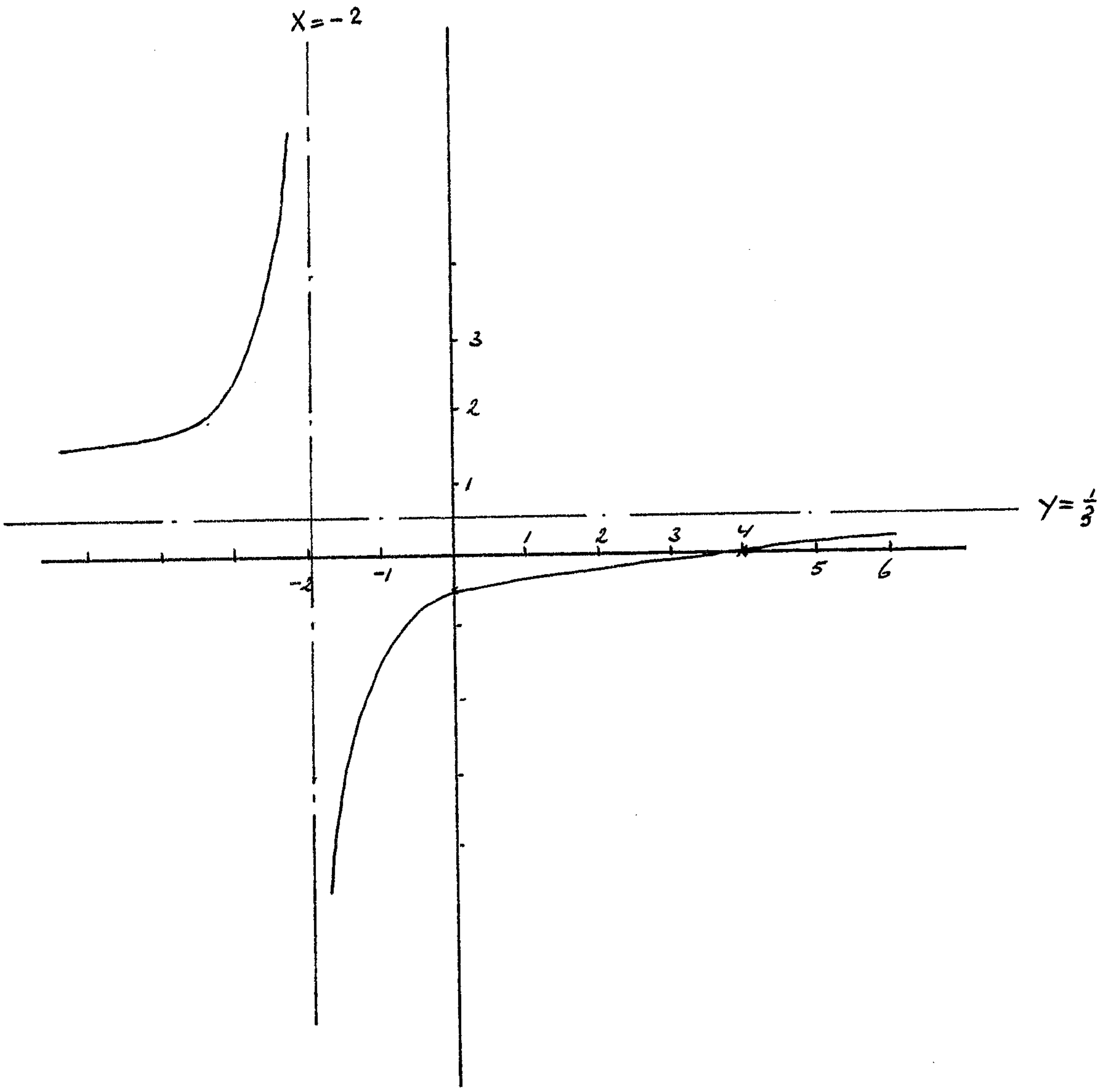
$= \dfrac{18}{(3x + 6)^2}$

niet

f': + + + + + + + + + ? + + + + + + + + + +

x = -2

f altijd stijgend, behalve voor x = -2.



viel

Voorbeeld 3: Gegeven: $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 + 7x - 4}$.

Gevraagd:
a) Df en Bf
b) Vergelijking asymptoten.
c) Snijpunten met de x-as.
d) f'(x) en wanneer is f'(x) positief en negatief.
e) Bepaal de locale extremen.
f) Teken de grafiek.
g) Voor welke waarden van x geldt $f(x) \geqslant \frac{1}{2}$

Oplossing:

a. Df: Stel: $2x^2 + 7x - 4 = 0$

$$x_{1_{12}} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{4}$$

$x_1 = 1/2 \qquad x_2 = -4$

$Df = (x \in \mathbb{R} / x \neq -4 \wedge x \neq \frac{1}{2})$

Bf1 = zie punt f.

b. Vertikale asymptoot:

$2x^2 + 7x - 4 = 0 \qquad x = -4 \vee x = \frac{1}{2}$.

Horizontale asymptoot:

$$\lim_{x \to \pm \infty} = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 + 7x - 4} = \frac{1}{2}. \Rightarrow y = \frac{1}{2}.$$

c. Snijpunten uit x-as: $f(x) = 0$.

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$(x+3)(x-1) = 0 \qquad x = -3 \vee x = 1$

$S_1 = (-3,0) \qquad S_2 = (1,0)$

niet

d. $$f'(x) = \frac{(2x-2)(2x^2+7x-4) - (x^2+2x-3)(4x+7)}{(2x^2+7x-4)^2}$$

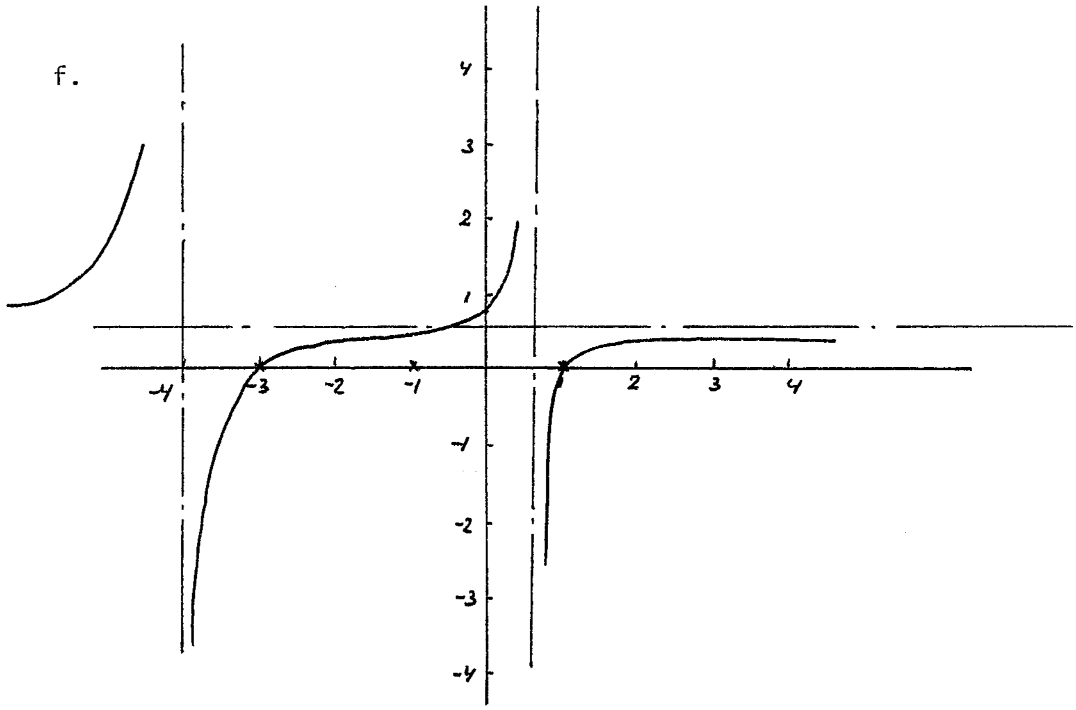
$$= \frac{3x^2+4x+13}{(2x^2+7x-4)^2}$$

Stel: $f'(x) = 0$: $\quad 3x^2 + 4x + 13 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4.3.13}}{2.3} \qquad D < 0$$

$\rightarrow$ Geen oplossingen $\rightarrow$ geen lokale extremen.

f.



g. $f(x) \geqslant \frac{1}{2}$ $\qquad \frac{x^2+2x-3}{2x^2+7x-4} \geqslant \frac{1}{2}$ $\qquad \frac{2(x^2+2x-3) - (2x^2+7x-4)}{2(2x^2+7x-4)} \geqslant 0$

$$\frac{-3x-2}{2(2x^2+7x-4)} \geqslant 0$$

$-3x - 2 = 0 \rightarrow x = -2/3$

$$2x^2 + 7x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49+32}}{4} = \frac{-7 \pm 9}{4}$$

$x = -4 \ \vee \ x = 1/2$

+	?	-	0	+	?	-
	-4		$-2/3$		$1/2$	

Oplossing: $x < -4 \ \vee \ -2/3 \leqslant x < 1/2$

<u>Voorbeeld 4:</u> Gegeven: $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 7x - 4.}$ Gevraagd: zie voorb. 3

a. <u>Df:</u> $2x^2 - 7x - 4 = 0$

$$2x^2 - 8x + x - 4 = 0$$

$$2x\ (x-4) + 1\ (x-4) = 0$$

$$(2x + 1)\ (x-4) = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \vee x = 4.$$

Df: $(x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq -\frac{1}{2} \wedge x \neq 4)$

Bf: $(x \in \mathbb{R})$

b. <u>Asymptoten:</u>

<u>Vertikale asymptoot:</u> $x = -\frac{1}{2}$ en $x = 4.$

<u>Horizontale asymptoot:</u> $\lim\limits_{x \to \pm \infty} = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 7x - 4}$

$$\lim_{x \to \pm \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}{2 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}.$$

c. <u>Snijpunten van de x-as:</u> $f(x) = 0$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)\ (x+1) = 0$$

$$x = 3 \vee x = -1$$

$S_1 = (3,0)$ $S_2 = (-1,0)$

========== ============

d. $$f'(x) = \frac{(2x - 2)\ (2x^2 - 7x - 4) - (x^2 - 2x - 3)\ (4x - 7)}{(2x^2 - 7x - 4)^2}$$

$$= \frac{-3x^2 + 4x - 13}{(2x^2 - 7x - 4)^2}$$

Stel: $f'(x) = 0$ $\qquad -3x^2 + 4x - 13 = 0$

$D = 16 - 4.-3.\ -13$

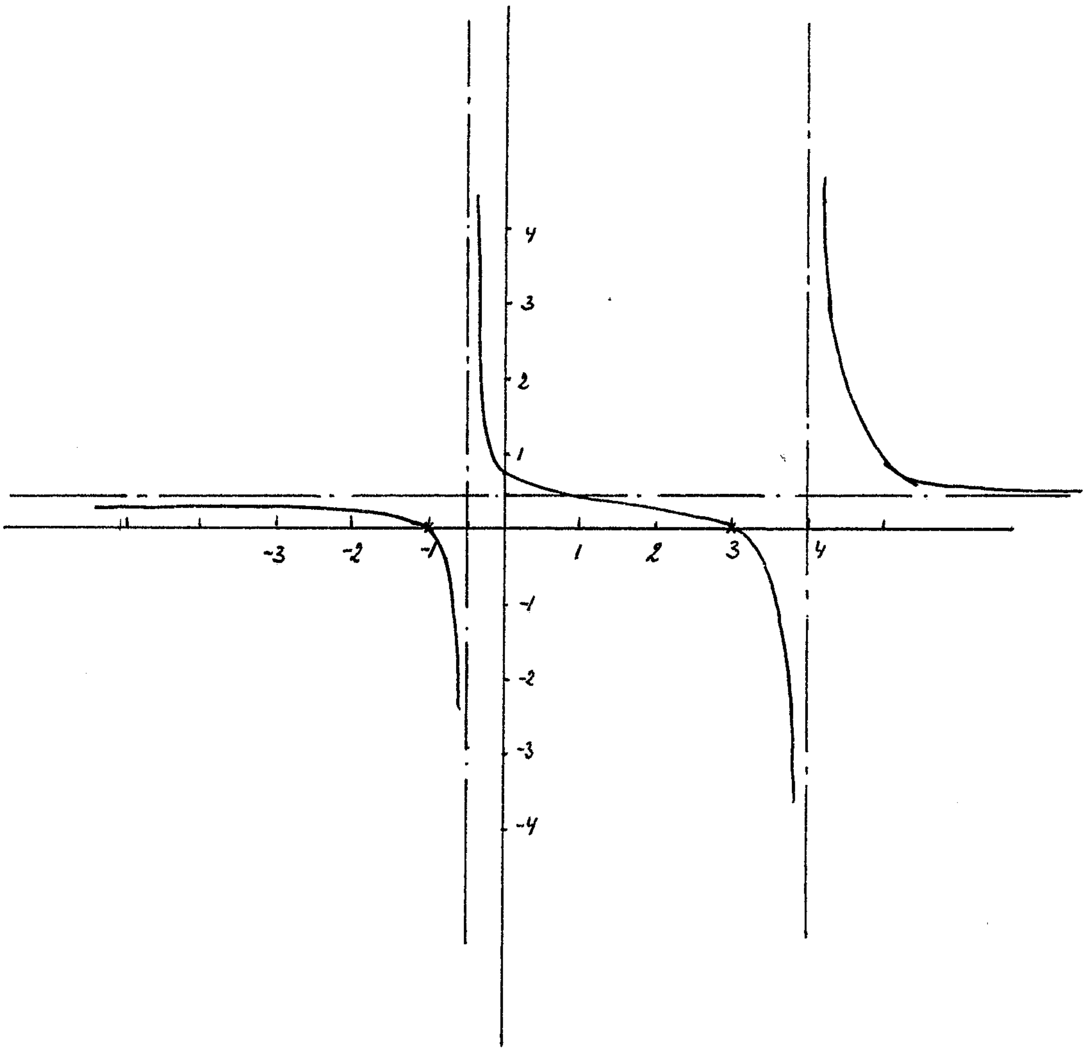
$D < 0$ geen wortels.

f'.

-	?	-	?	-
	$-\frac{1}{2}$		4	

f.

dal.	?	dal.	?	dal.
	$-\frac{1}{2}$		4	



Voorbeeld 5: $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2}$

a) Df en Bf

b) Asymptoten en snijpunten met de x-as

c) Bepaal de lokale extremen van f en teken de grafiek.

d) Bepaal f'(x)

a. Df: $x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2)\ (x-1) = 0$

$x = 2 \quad v \quad x = +1$

$Df = (x \in R \ / \ x \neq 2 \wedge x \neq +1)$

Bf = zie punt e.

b. Snijpunt x-as: $f(x) = 0 \quad x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x-3)\ (x-1) = 0$

$x = 3 \quad v \quad x = 1$

$S_1 = (3,0) \quad ; \quad S_2 = (1,0)$ vervalt f(1) bestaat niet.

Vertikale asymptoot:

noemer nul: $x = -2$

$x = 1$

Horizontale asymptoot: $\lim\limits_{-x \to \infty} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2} = 1 \Rightarrow Y = 1$

d. $f'(x) = \dfrac{(2x-4)\ (x^2 + x - 2) - (x^2 - 4x + 3)\ (2x + 1)}{(x^2 + x - 2)^2}$

$= \dfrac{5x^2 - 10x + 5}{(x^2 + x - 2)^2} = \dfrac{5\ (x^2 - 2x + 1)}{(x^2 + x - 2)^2}$

$= \dfrac{5\ (x - 1)^2}{(x^2 + x - 2)^2}$

e.

$$\begin{array}{ccccccccc} + & + & \overset{?}{|} & + & + & \overset{?}{|} & + & + & + \\ \hline & & x = -2 & & & x=1 & & & \end{array}$$

Dus de funktie f is altijd stijgend.

niet

<u>Voorbeeld 6:</u> $f(x) \quad \frac{x-2}{x^2+2x-3}$

a. <u>Df:</u> $x^2 + 2x - 3 = 0$

$(x+3)\ (x-1) = 0$

$x = -3 \quad v \quad x = 1$

$Df = (\ x \in \mathbb{R}\ /\ x \neq -3 \quad x \neq +1)$
$Bf = (\ f(x) \in \mathbb{R}\ /\ f(x) \geqslant 0{,}66 \quad v \quad f(x) \leqslant 0{,}09\ )$

b. <u>Snijpunt met de x-as:</u>

$f(x) = 0 \qquad x - 2 = 0$
$x = 2 \qquad S = (2,0)$

<u>Asymptoten:</u>

<u>Vertikale asymptoot:</u> $x = -3$ en $x = 1$.

<u>Horizontale asymptoot:</u> $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x-2}{x^2+2x-3} = 0 \Rightarrow y = 0$

c. $$f'(x) = \frac{1\ (x^2+2x-3) - (x-2)\ (2x+2)}{(x^2+2x-3)^2}$$

$$= \frac{x^2+2x-3-2x^2-2x+4x+4}{(x^2+2x-3)^2}$$

$$= \frac{-x^2+4x+1}{(x^2+2x-3)^2}$$

<u>Lokale extremen:</u> Stel: $f'(x) = 0 \qquad -x^2+4x+1 = 0$

$$x_{12} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4}}{-2}$$

$x_1 = 2 + \sqrt{5} \approx 4{,}2$
$x_2 = 2 - \sqrt{5} \approx -0{,}2.$

f'	-	?	-	0	+	?	+	0	-
		-3		$2-\sqrt{5}$		1		$2+\sqrt{5}$	

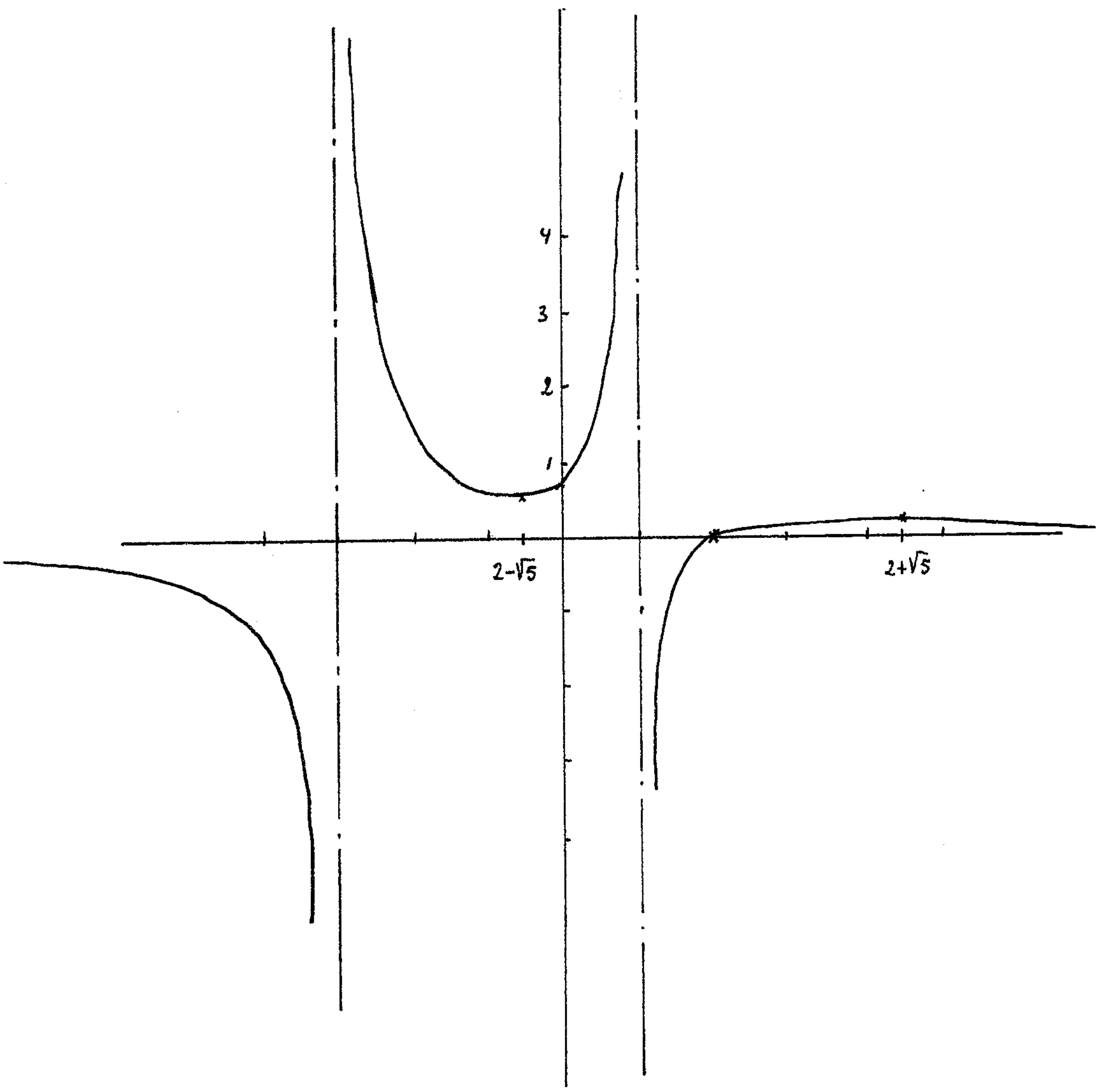
				min.				max.	
f	dal.	?	dal.	0	st.	?	st.	0	dal.
		-3		$2-\ 5$		1		$2+\ 5$	

<u>Minimum voor $x = 2-\sqrt{5}$:</u> $\quad f(2-\sqrt{5}) = \dfrac{2-\sqrt{5}-2}{(2-\sqrt{5})^2 + 2(2-\sqrt{5}) - 3}$

$$= \frac{-\sqrt{5}}{10 - 6\sqrt{5}} \approx \underline{\underline{0{,}65}}$$

<u>Maximum voor $x = 2+\sqrt{5}$:</u> $\quad f(2+\sqrt{5}) = \dfrac{2+\sqrt{5}-2}{(2+\sqrt{5})^2 + 2(2+\sqrt{5}) - 3} \approx \underline{\underline{0{,}09}}$

d. <u>Grafiek.</u>



e. Vergelijking van de raaklijn in (0/2/3:)

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 4x - 1}{(x^2 + 2x - 3)^2}$$

$f'(o) = \frac{1}{9}$ R.C)

Raaklijn $\Rightarrow$ $y = \frac{1}{9} x + b$

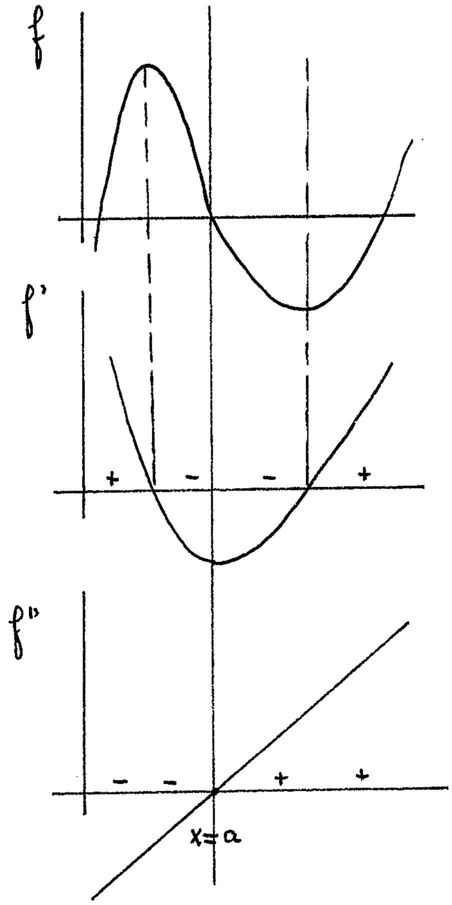
Raaklijn door $(0_1 \frac{2}{3})$: $\frac{2}{3} = \frac{1}{9} . 0 + b$ $b = 2/3$

$$y = \frac{1}{9x} + \frac{2}{3}$$

$$\boxed{9y - x - 6 = 0}$$

Buigpunten.

De grafiek van $f'(x)$ heeft voor $x = a$ een buigpunt indien $f''(a) = 0$ en $f''(x)$ voor $x = a$ van teken wisselt.
Een buigpunt is een punt waar de grafiek overgaat van hol naar bol of omgekeerd.



: (3e graadskromme)

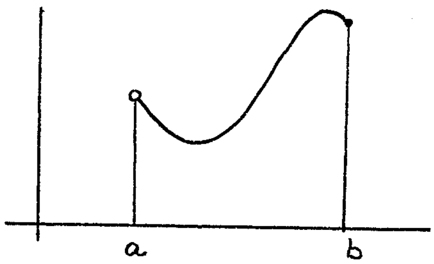
: (2e graadskromme)

: (1e graadskromme)

Lokale extremen - Randextremen.

Indien een funktie gegeven is op een gesloten interval, [a,b] dan noemen we de waarden f(a) en f(b) de randextremen. (Indien men de lokale extremen vraagt horen de randextremen erbij).

<u>Gegeven:</u> f op interval ⟨a,b]



In x = b treedt een minimum op.

In x = a treedt <u>geen randextreem</u> op.