INTEGREREN

2. Integreren

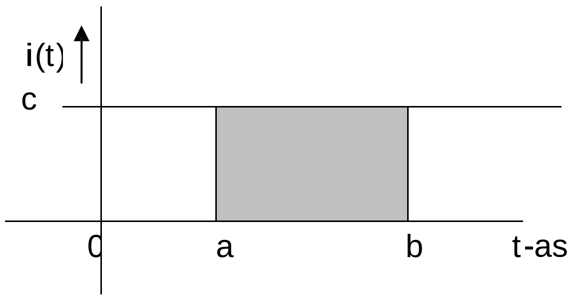
2.1 Basisprincipe

Voorbeeld

a: Er loopt een constante stroom $i(t) = c$ C/s gedurende een tijdsinterval T van $t_{begin} = a$ tot $t_{eind} = b$. Hoeveel lading is er gedurende het tijdsinterval getransporteerd?

Basiswet $Q(t) = c \cdot \text{Tijdsduur} = c \cdot (b - a)$

Plaatje van de grafiek van i(t):



Figuur 2.1 Stroom-tijd grafiek 1

Q_{tot} = "oppervlakte" tussen de grafiek van $i(t)$ en de t-as tussen $t_{begin} = a$ tot $t_{eind} = b$
= $c \cdot (b - a)$

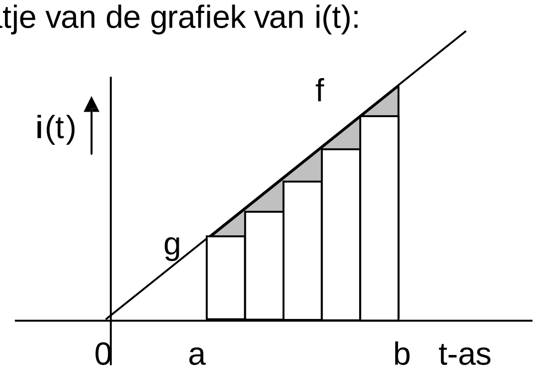
Merk op: met de keuze van een functie $F(t) = c \cdot t$ dus met $F'(t) = i(t) = c$ geldt ook:

$$Q_{tot} = F(b) - F(a) = c \cdot (b - a)$$

b: Er loopt een stroom $i(t) = c \cdot t$ C/s gedurende een tijdsinterval T van $t_{begin} = a$ tot $t_{eind} = b$.

Hoeveel lading is er gedurende het tijdsinterval getransporteerd?

Plaatje van de grafiek van i(t):



Figuur 2.2 Stroom-tijd grafiek 2

Q_{tot} = "oppervlakte" tussen de grafiek van $i(t)$ en de t-as tussen $t_{begin} = a$ tot $t_{eind} = b$.

= som van alle rechthoeken als breedte naar 0 gaat

= oppervlakte driehoek 0bf - oppervlakte driehoek 0ag

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} i(t_i)\,\Delta t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} c\, t_i\,\Delta t = \frac{1}{2} c\, b\, b - \frac{1}{2} c\, a\, a = \frac{1}{2} c\, b^2 - \frac{1}{2} c\, a^2$$

Merk op: met de keuze van een functie $F(t) = \frac{1}{2} c\, t^2$ dus met $F'(t) = i(t) = c\, t$

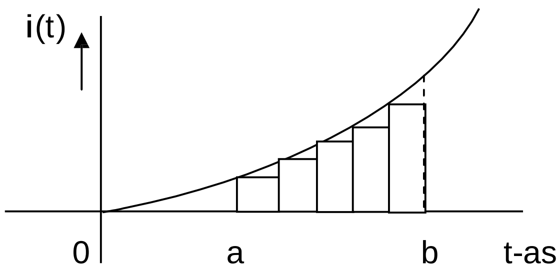
geldt ook:

$$Q_{tot} = F(b) - F(a) = \frac{1}{2} c\, b^2 - \frac{1}{2} c\, a^2$$

c: Er loopt een stroom $i(t) = c\, t^2$ C/s gedurende een tijdsinterval T van $t_{begin} = a$ tot $t_{eind} = b$.

Hoeveel lading is er gedurende het tijdsinterval getransporteerd?

Plaatje van de grafiek van $i(t)$:



Figuur 2.3 Stroom-tijd grafiek 3

Q_{tot} = "oppervlakte" tussen de grafiek van $i(t)$ en de t-as tussen $t_{begin} = a$ tot $t_{eind} = b$

= som van alle rechthoeken als breedte naar 0 gaat

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} i(t_i)\,\Delta t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} c\,(t_i)^2\,\Delta t$$

Merk op: met de keuze van een functie $F(t) = \frac{1}{3} c\, t^3$ dus met $F'(t) = i(t) = c\, t^2$

geldt ook:

$$Q_{tot} = F(b) - F(a) = \frac{1}{3} c\, b^3 - \frac{1}{3} c\, a^3$$

Algemeen:

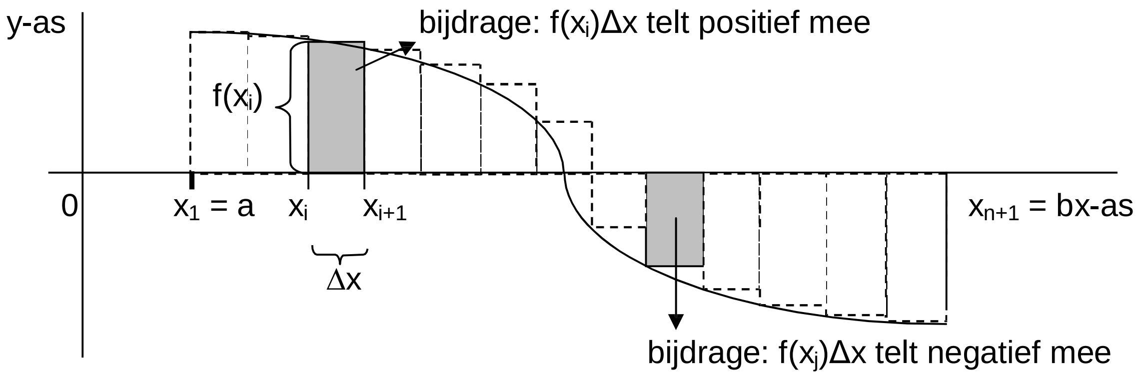
Praktisch willen we:

Een fysische grootheid G berekenen, waarbij

G = “oppervlakte” tussen de grafiek van f(x) en x-as tussen $x_{begin} = a$ tot $x_{eind} = b$.

Grafisch betekent dit:

G = de “oppervlakte” tussen de grafiek van f(x) en de x-as van x=a tot x=b



Figuur 2.4 “oppervlakte” tussen de grafiek en de x-as

Grootheid G = “oppervlakte” tussen de grafiek van $f(x)$ en x-as van $x_{begin} = a$ tot $x_{eind} = b$.

Hoe berekenen we de “oppervlakte”?

Maak een verdeling in n gelijke delen van het interval [a,b], breedte $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$,

Dit levert een verdeling: $x_1 = a + 0\ \Delta x = a$, $x_2 = a + 1\ \Delta x$, $x_3 = a + 2\ \Delta x$, . . . , $x_{n+1} = a + n\ \Delta x = b$

In het algemeen geldt dus: $x_i = a + (i-1)\ \Delta x$, met $0 \le i \le n+1$

Dan geldt:

Fysische grootheid G = $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n}$

De limiet is een erg lastig uit te rekenen grootheid.

De wiskunde zegt nu dat (we zullen dit in de volgende paragraaf aantonen):

Fysische grootheid G = $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_{x=a}^{b} = F(b) - F(a)$

Conclusie:

Als:

1. Een fysische grootheid G bepaald moet worden en

2. We kunnen aantonen dat de grootheid G gelijk is aan de “oppervlakte” tussen de x-as en de grafiek van een functie f(x).

   Dus we kunnen aantonen dat grootheid G = $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

Dan mogen we volgens de wiskunde G berekenen met G = $\int_a^b f(x)\,dx$

Opgave 1

Teken de volgende functies op het opgegeven gebied en bereken de “oppervlakte” tussen de grafiek van $f(x)$ en de x-as op het opgegeven gebied.

a: $f(x) = 3 + x$ tussen $x = 0$ en $x = 6$.

b: $f(x) = 6 - 2x$ tussen $x = -1$ en $x = 7$.

c: $f(x) = 3$ tussen $x = -5$ en $x = -1$.

d: $f(x) = 2x - 7$ tussen $x = 0$ en $x = 4$.

Opgave 2

Toon aan dat de gegeven functie $F(x)$ na differentiëren de $f(x)$ van opgave 1 oplevert.
Controleer dat $F(b) - F(a)$ de gevraagde oppervlakte van opgave 1 oplevert.

a: $F(x) = 3x + \frac{1}{2}x^2$ tussen $x = 0$ en $x = 6$.

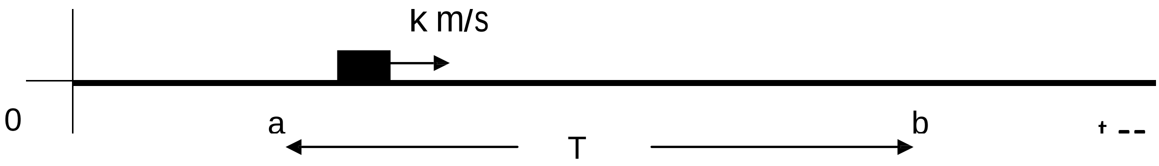
b: $F(x) = 6x - x^2 + 5$ tussen $x = -1$ en $x = 7$.

c: $F(x) = 3x$ tussen $x = -5$ en $x = -1$.

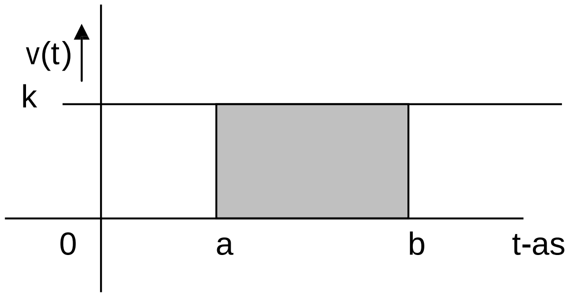
d: $F(x) = x^2 - 7x$ tussen $x = 0$ en $x = 4$.

Opgave 3

We hebben een voorwerp dat beweegt met constante snelheid, $v(t) = k$ m/s.
De afgelegde weg, $s(t)$,gedurende een tijdsduur T gelijk is aan $s(t) = k\ T = k(b-a)$.



De afgelegde weg is dan de “oppervlakte” tussen de grafiek van $v(t)$ en de t-as op [a , b].

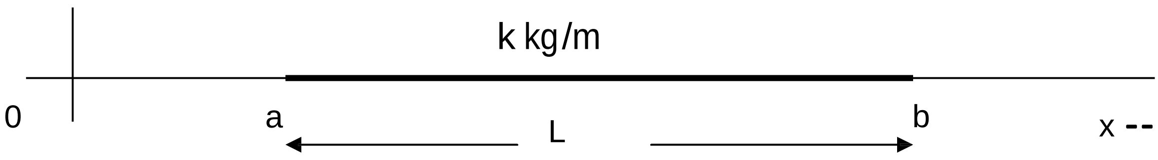


a: Leidt een limiet van een som af waarmee we de afgelegde weg op [a , b] kunnen bepalen, als de snelheid van het voorwerp is $v(t) = 6t + 4$ m/s.
Merk op: de snelheid is niet constant. We moeten het interval [a , b,] opdelen in n gelijke delen ter breedte Δt, zodat op elk stukje $[t_i, t_{i+1}]$ bij benadering $v(t)$ wel constant is en gelijk aan $v(t_i) = 6t_i + 4$.

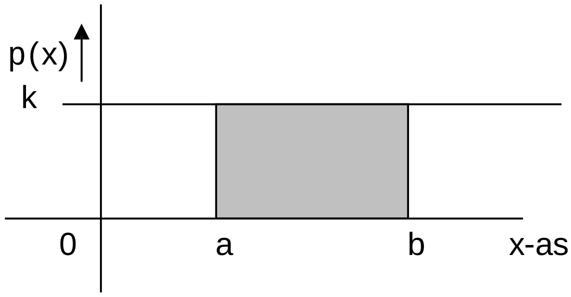
b: Herschrijf deze limiet zodanig dat daarin alleen a,b,i,n nog voorkomen.

Opgave 4

We hebben een staaf met constante massadichtheid, $p(x) = k$ kg/m.
De totale massa van de staaf met lengte L is dan gelijk aan $m = k\ L = k(b-a)$.



De totale massa is dan de “oppervlakte” tussen de grafiek van $p(x)$ en de x-as op [a , b].



a: Leidt een limiet van een som af waarmee we de totale massa op [a , b,] kunnen bepalen, als de massadichtheid van de staaf is $p(x) = 6x$ kg/m.
Merk op: zie opgave 3

b: Herschrijf deze limiet zodanig dat daarin alleen a,b,i,n nog voorkomen.

2.2 Begrippen en notaties

Definitie: F(x) is een primitieve van de (gegeven) functie f(x):

$$F'(x) = f(x)$$

Begrip: Integrand

Functie $f(x)$, waarvan de primitieve gevonden moet worden

Begrip: De onbepaalde integraal van f(x):

Betekenis: Dit is de verzameling van primitieven van $f(x)$)

Notatie $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

Immers stel dat je twee primitieven hebt: $\int f(x)\,dx = F_1(x)$ en $\int f(x)\,dx = F_2(x)$.
Dan geldt: $F_1'(x) = f(x)$ en $F_2'(x) = f(x)$, dus $F_1'(x) - F_1'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = 0$.
Dus $F_1(x) - F_2(x) = C$. Dus alle primitieven verschillen hooguit een constante met elkaar.

Begrip: De bepaalde integraal van f(x) van a tot b:

Notatie $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_{x=a}^{b} = F(b) - F(a)$

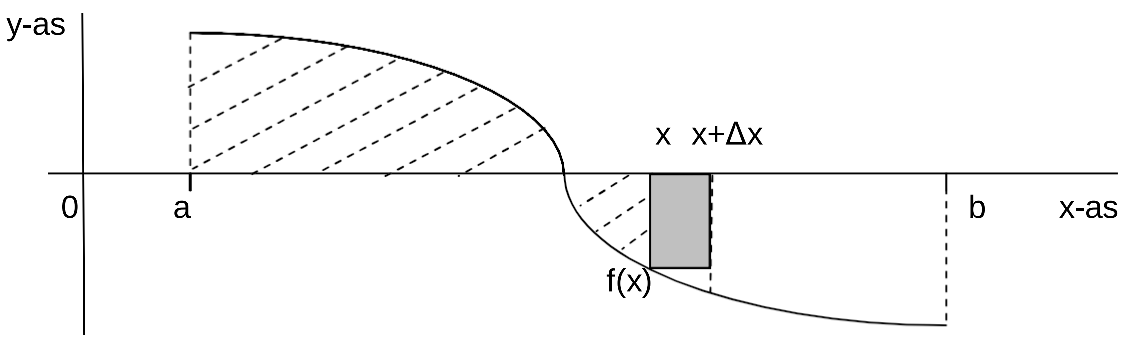
Merk op dat de eventuele constante bij de bepaalde integraal niet relevant is.
Daarom nemen we bij het berekenen van een bepaalde integraal de primitieve met constante 0.

We tonen nu aan dat de gevraagde oppervlakte

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_{x=a}^{b} = F(b) - F(a).$$

Daarvoor moeten we eerst een tussenfunctie definiëren.

We definiëren de oppervlakte functie $O(x)$, voor de oppervlakte tussen de grafiek van f(x) en de x-as vanaf $x = a$ tot een willekeurige x, ergens tussen a en b, dus $O(x)$, met $a \leq x \leq b$.
Zie het gearceerde gedeelte in de figuur hierna.



Figuur 2.5“oppervlakte”

Er geldt nu:

1. $O(a) = 0$ en $O(b) = \text{gevraagde oppervlakte}$.

2. $O(x+\Delta x) - O(x) \approx f(x)\Delta x$, dus $\dfrac{O(x+\Delta x) - O(x)}{\Delta x} \approx f(x)$,

   dus $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{O(x+\Delta x) - O(x)}{\Delta x} = f(x)$, dus $O(x)$ is een primitieve van $f(x)$

3. $O(x) = F(x) + C$ en $O(a) = F(a) + C = 0 \Rightarrow -F(a) = C$

Dus de gevraagde oppervlakte $O(b) = F(b) + C = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$

Opgave 5

a: Gegeven is $f(x) = 10x - 3\sin(3x) + 6e^{2x}$.
Ga na of $F(x) = 5x^2 + \cos(3x) + 3e^{2x}$ een primitieve is van $f(x)$.

b: Gegeven is $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} - \dfrac{1}{x} + \ln(x)$.
Ga na of $F(x) = \tan(x) - \ln(x) + \dfrac{1}{x}$ een primitieve is van $f(x)$.

2.3 Primitieve F(x) bepalen

De primitieve met behulp van de standaardprimitieven, rekenregels en herschrijven.

2.3.1 Standaardprimitieven

Standaardfunctie f(x)		Standaardprimitieve F(x)
a		ax
x^n		$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$, voor $n \neq -1$
$\frac{1}{x}$		$\ln(x)$
$\cos(\ x)$		$\frac{1}{\ }\sin(\ x)$
$\sin(\ x)$		$-\frac{1}{\ }\cos(\ x)$
$\frac{1}{\cos^2(\ x)}$		$\frac{1}{\ }\tan(\ x)$
e^{ax}		$\frac{1}{a}e^{ax}$
b^{ax}		$\frac{1}{a\ln(b)}b^{ax}$
$\frac{1}{a^2+x^2}$		$\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$

Tabel 2.1 Standaard primitieven

Voorbeelden

a: Als $f(x) = \cos(5x)$, dan is $F(x) = \frac{1}{5}\sin(5x) + C$.

b: Als $g(x) = e^{2x}$, dan is $G(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

c: Als $h(x) = \frac{1}{x}$, dan is $H(x) = \ln x + C$.

Opgave 6

Bepaal de primitieve van:

a: $f(x) = \sin(2x)$

d: $f(x) = e^{-3x}$

g: $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$

b: $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

e: $f(x) = x^{2e}$

h: $f(t) = \dfrac{1}{\cos^2(5t)}$

c: $f(x) = \cos(7x)$

f: $f(x) = t$

i: $f(x) = \dfrac{1}{4 + x^2}$

2.3.2 Rekenregels basis

Naam van de regel	Formule van de regel
1. maal een constante:	$\int a\ f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$
2. somregel en verschilregel:	$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ en
	$\int (f(x)-g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

Voorbeelden

a: $\int 4\cos(5x)dx = 4\int \cos(5x)dx = 4\ \frac{1}{5}\sin(5x) + C = \frac{4}{5}\sin(5x) + C$ (maal een constante)

b: $\int (e^{-2x} + x^4)dx = \int e^{-2x}dx + \int x^4dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{5}x^5 + C$ (somregel)

c: $\int (\frac{1}{x} - e^{2x})dx = \int \frac{1}{x}dx - \int e^{2x}dx = \ln(x) - \frac{1}{2}e^{2x} + C$ (verschilregel)

Opgave 7

Bereken de primitieve van:

a: $f(x) = 3 + x$

b: $f(x) = 6 - 2x$

c: $f(x) = 3$

d: $f(x) = 2x - 7$

e: $f(x) = 10x - 3\sin(3x) + 6e^{2x}$

Opgave 8

Berekende primitieve van functies in 8a t/m 8n (vervolg op blz. 49):

a: $f(x) = 6\ e^{-3x}$

b: $f(s) = 8\ s^6$

c: $f(x) = 4\ x^{-5}$

d: $f(x) = \frac{5}{4 + x^2}$

e: $f(x) = 3\sin(4x)$

f: $f(x) = \sin(ex) + e\sin(x) + x\sin(e)$

g: $f(x) = 3\sin(4x) - 4\cos(3x)$

h: $f(t) = x\ t^{-1}$

i: $f(x) = \frac{x}{3t}$

j: $f(x) = e^{x} - e^{-x}$

k: $f(x) = -2e^{-2x} + \frac{2}{x}$

l: $f(x) = s\ e^{2x}$

m: $f(x) = -\frac{1}{2x} - \cos\left(-\frac{2x}{3}\right)$

n: $f(t) = \frac{x}{3}\ t^{-1}$

2.3.3 Rekenregel substitutie

We kunnen op basis van de regels uit 2.3.1 en 2.3.2 al heel wat integralen berekenen.

Toch zul je merken, dat er nog heel veel integralen zijn die met de voorgaande regels niet berekend kunnen worden.

We zullen in deze paragraaf een nieuwe regel bespreken, waarmee we het aantal te berekenen integralen verder zullen uitbreiden.

Deze regel is gebaseerd op de kettingregel voor het differentiëren, deze regel heet de substitutieregel.
We gaan de integraal vereenvoudigen, door substitutie (vervanging) uit te voeren.

Veronderstel nu dat y een functie van x is, dus $y = g(x)$, dan is

$\frac{\text{de verandering in } y}{\text{de verandering in } x} = \frac{dy}{dx} = y' = g'(x)$ en

(de verandering in y) is gelijk aan $g'(x)$ (de verandering in x),

dus $dy = g'(x)dx$.

Veronderstel nu dat we de volgende integraal moeten berekenen:

$$\int f(g(x))\ g'(x)\,dx$$

Op basis van de substitutie van $y = g(x)$, is $dy = g'(x)dx$.

Dus volgt nu: $\int f(g(x))\ g'(x)\,dx = \int f(y)\ dy$.

Vaak is de tweede integraal, in de variabele y, veel eenvoudiger.
Deze is vaak met de standaardtabel of de basisregels 1 t/m 3 op te lossen.

Uit het voorgaande volgt de regel:

3. substitutieregel: $\int f(g(x))\ g'(x)\,dx = \int f(y)\ dy$

   Substitutie van $y = g(x)$
   en $dy = g'(x)dx$

Op basis van welke overwegingen moeten we nu deze regel kiezen bij het uitrekenen van een integraal?

3.1 De integraal is niet standaard

3.2 De integraal is niet te herschrijven met de basisregels 1 t/m 2.

3.3 Je hebt een functie $g(x)$ ingevuld in een andere functie $f(x)$ en de afgeleide $g'(x)$ komt ook voor

Voldoet de integraal aan de voorgaande drie criteria dan hebben we grote kans dat met de substitutieregel deze integraal te vereenvoudigen is.

Voorbeelden substitutie zonder grenzen:

a: $$\int 2x\, e^{x^2} dx = \int e^y dy = e^y + C = e^{x^2} + C$$

$$\underset{y = x^2 \text{ en } dy = 2x dx}{\uparrow} \qquad \underset{y = x^2}{\uparrow}$$

b: $$\int 3\cos(3t+5)\; dt = \int \cos(y) dy = \sin(y) + C = \sin(3t+5) + C$$

$$\underset{y = 3t+5 \text{ en } dy = 3dt}{\uparrow} \qquad \underset{y = 3t+5}{\uparrow}$$

Bij sommige integralen staat de integraal weliswaar niet in bovenstaande vorm, maar wat niet is, kun je wel maken, b.v.: $\int \cos(3t+1)\; dt$

We willen de substitutieregel toepassen, we hebben immers $3t+1$ ingevuld in de functie $\cos(x)$, maar de afgeleide 3 van $3t+1$ komt niet voor.
Omdat slechts een constante ontbreekt, kunnen we die toch aanbrengen.

$$\int t\cos(t^2+1)\; dt = \frac{1}{2}\int 2t\,\cos(t^2+1)\; dt = \frac{1}{2}\int \cos(y) dy = \frac{1}{2}\sin(y) + C = \frac{1}{2}\,\sin(t^2+1) + C$$

$$\underset{y = t^2+1 \text{ en } dy = 2t dt}{\uparrow} \qquad \underset{y = t^2+1}{\uparrow}$$

Let op: Je mag alleen constanten voor de integraal halen, of er binnen brengen, basisregel 1.

Wat dus niet mag is: $\int t\,\cos(3t+1)\; dt = \cancel{\frac{t}{3}\int 3\,\cos(3t+1)\; dt}$

Heb je te maken met een bepaalde integraal, een integraal met grenzen, dan moet je deze grenzen aanpassen bij de substitutie.

Hierbij is het beter om in één keer de substitutie te doen, je hoeft dan niet eerst terug te substitueren naar x om daarna de grenzen van x in te kunnen vullen.

Voorbeeld met grenzen:

$$\int_1^2 2x\, e^{x^2} dx = \int_1^4 e^y dy = \left[e^y\right]_{y=1}^{4} = e^4 - e^1$$

$$\uparrow$$

$$y = x^2 \text{ en } dy = 2x dx$$

$$x_0 = 1 \quad y_0 = 1^2 = 1$$

$$x_1 = 2 \quad y_1 = 2^2 = 4$$

Opgave 9

Bepaal de volgende integralen

a: $\int 2x(x^2+1)^3 dx$

b: $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(t)\sin^2(t)dt$

c: $\int_1^2 \frac{2t}{t^2+4} dt$

d: $\int \frac{2t}{\cos^2(t^2+4)} dt$

e: $\int 2x(x^2+1)dx$

f: $\int t\cos(t^2+3)dt$

g: $\int (t^3+t+1)\sqrt{t^4+2t^2+4t}\, dt$

2.3.4 Rekenregel partiële integratie

We breiden onze gereedschapskist, om integralen op te lossen verder uit, met de regel voor partiële integratie.

Deze regel is in feite gebaseerd op de productregel van het differentiëren.
We gebruiken hierbij:

Als $F(x)$ een primitieve van $f(x)$, dan is $F'(x) = f(x)$ en $\int f(x)dx = F(x)$.

en de productregel bij het differentiëren.

$(f(x)\ g(x))' = f'(x)\ g(x) + f(x)\ g'(x)$,

Uit het voorgaande kunnen we dus concluderen:

$f(x)\ g(x)$ is een primitieve van $f'(x)\ g(x) + f(x)\ g'(x)$.

Dus $\int (f'(x)\ g(x) + f(x)\ g'(x))dx = f(x)\ g(x)$.

Deze regel is echter in de praktijk niet werkzaam.
We moeten zelden een integraal uitrekenen die bestaat uit een som van twee producten, waarbij in de producten de functies en hun afgeleide op de gestelde manier voorkomen.

Herschrijven we de regel dan is deze wel bruikbaar.

$\int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx = f(x)g(x)$.

Dus $\int (f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x))dx = f(x)g(x)$.

Dus $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

Uit het voorgaande volgt de regel:

4. Partiële integratie $\int f(x)\ g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)\ g(x)\,dx$

Op basis van welke overwegingen moeten we nu deze regel kiezen bij het uitrekenen van een integraal?

4.1 De integraal is niet standaard

4.2 De integraal is niet te herschrijven met de basisregels 1 t/m 3.

4.3 Je hebt een product van twee functies, waarbij je de een als gewone functie $f(x)$ en de ander als afgeleide $g'(x)$ kunt zien.

Bedenk wel dat je $f(x)$ en $g'(x)$, net verkeerd kan kiezen en

- de integraal moeilijker wordt, of
- dat je $f'(x)$ of $g(x)$ niet kan bepalen.

Draai dan je keuze om en probeer het opnieuw.

Voorbeelden:

a: Zonder grenzen:

$$\int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = e^{2x} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

b: Met grenzen:

$$\int_1^2 xe^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_{x=1}^{2} - \frac{1}{2}\int_1^2 e^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_{x=1}^{2} - \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_{x=1}^{2} = e^4 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^4 + \frac{1}{4}e^2 = \frac{3}{4}e^4 - \frac{1}{4}e^2$$

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = e^{2x} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

Opgave 10

Bepaal de volgende integralen

a: $\int x\sin(x)dx$

b: $\int_1^2 t\ln(t)dt$

c: $\int_1^2 x^2e^xdx$

d: $\int (x+1)e^{2x}dx$

e: $\int_1^2 \ln(t)dt$

f: $\int_1^2 (x+3)^2e^xdx$

2.3.5 Rekenregel herschrijven

De functie die we moeten differentiëren kunnen we op basis van rekenregels voor vermenigvuldigen en / of delen en / of machten en/ of logaritmen en / of voor goniometrie en /of enz. zodanig herschrijven dat we daarna de tabel of de rekenregels kunnen toepassen.

Uit het voorgaande volgt de regel:

5. Herschrijven $\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx$,
   waarbij door rekenregels geldt $f(x) = g(x)$

Op basis van welke overwegingen moeten we nu herschrijven bij het uitrekenen van een integraal?

5.1 De integraal is niet standaard

5.2 De integraal is niet te herschrijven met de basisregels 1 t/m 4.

Voorbeelden

a: $\int 2\sin(5x)\cos(5x)dx = \int \sin(10x)dx = -\frac{1}{10}\cos(10x) + C$ (gonioregel)

$2\sin(5x)\cos(5x) = f(x) = g(x) = \sin(10x)$

b: $\int e^{-2x}\; e^{5x}dx = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$ (machtregel)

$e^{-2x}\; e^{5x} = f(x) = g(x) = e^{3x}$

c: $\int \frac{x^3+3x}{x}dx = \int (x^2+3)dx = \int x^2dx + \int 3dx = \frac{1}{3}x^3 + 3x + C$ (regel voor het delen)

$\frac{x^3+3x}{x} = f(x) = g(x) = x^2+3$

d: $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$ (machtregel)

$\sqrt{x} = f(x) = g(x) = x^{\frac{1}{2}}$

Opgave 11

Bereken:

a: $\int (\sqrt{3x} + \sqrt{e^{3x}})dx$

b: $\int \frac{3x(x+5)}{x^3}dx$

c: $\int \frac{x}{3t}dt$

d: $\int (3e^{1-13x})dx$

Opgave 12

Bereken

a: $\displaystyle\int \frac{3t(t+5)}{\sqrt{t}}\,dt$

g: $\displaystyle\int \frac{\sin(3t) - 3\cos(t)}{13}\,dt$

b: $\displaystyle\int 3t\sqrt{x}\,dx$

h: $\displaystyle\int 3t\sqrt{x}\,dt$

c: $\displaystyle\int_1^4 \frac{\cos(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}\,dt$

i: $\displaystyle\int \frac{3\sqrt{t}\,(\sin^2(3t) + \cos^2(3t))}{2}\,dt$

d: $\displaystyle\int x^2\cos(x)\,dx$

j: $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx$

e: $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

k: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x\,\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$

f: $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{2x+3}\,dx$

l: $\displaystyle\int_0^1 2\sin t\,\cos t\,dt$

Opgave 13

Iemand laat een cilindervormige emmer (10 liter inhoud) vollopen met een volumestroom v(t):

$0 \le t \le 25$ sec:	$v(t) = 0{,}2$ liter/s	kraan volledig open
$25 \le t \le 35$ sec:	$v(t) = 0{,}2\, e^{-\frac{t-25}{5}}$ liter/s	kraan wordt gesloten

a: Bepaal het ingestroomde volume V tussen 0 en 25 sec.

b: Bepaal het ingestroomde volume V tussen 25 en 35 sec.

Tips:

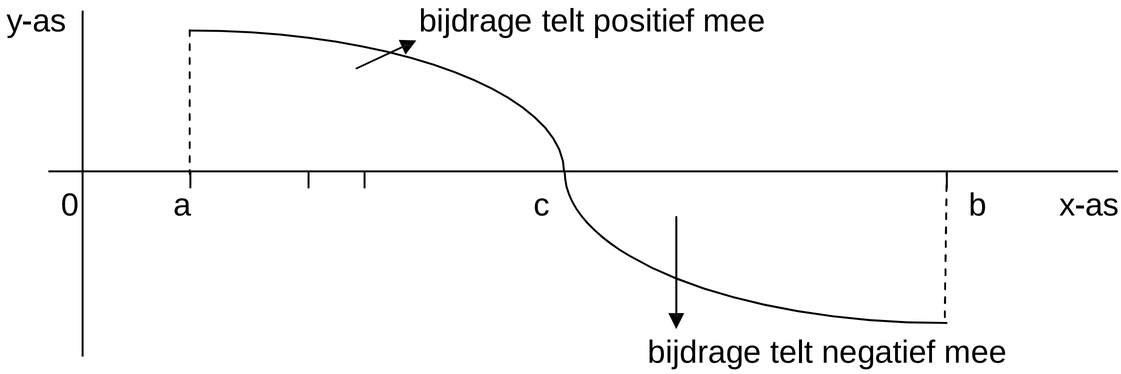
- deel de tijd t op in deelintervallen Δt en beschouw v(t) op zo'n deelinterval constant.
- werk via een som van deelvolumes ΔV naar een integraalrekening toe.
- Jij kunt de integraal oplossen met de substitutieregel.

2.4 Integraal versus echte oppervlakte

In paragraaf 2.1 hebben we gezien dat de bepaalde integraal = “oppervlakte”.
Bedenk dat hier de “oppervlakte” negatief kan zijn.

$\int f(x)dx =$ de “oppervlakte” tussen de grafiek van f(x) en de x-as van x = a tot x = b.

Hierbij geldt dat “oppervlakte” wil zeggen dat een “oppervlakte” onder de x-as negatief meetelt.



Figuur 2.7 “oppervlakte” = integraal

Wanneer we nu de echte oppervlakte willen bepalen dan moet de oppervlakte onder de x-as positief meetellen.

Hoe kunnen we nu met een integraal de echte oppervlakte berekenen?

Tot x = c ligt de grafiek boven de x-as, dus de “oppervlakte” = echte oppervlakte.

Dus oppervlakte = $\int_a^c f(x)dx$

Vanaf x = c ligt de grafiek onder de x-as, dus de “oppervlakte”= -(echte oppervlakte).

Dus oppervlakte = $-\int_c^b f(x)dx$

De totale oppervlakte is dan: $\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b -f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$

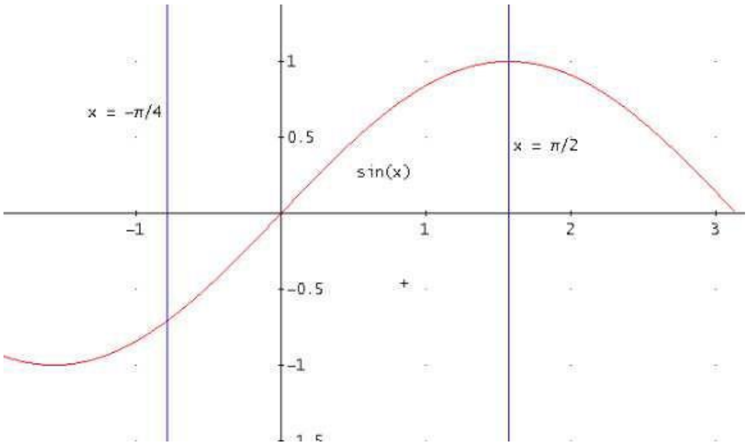
Wanneer we dus de echte oppervlakte moeten bepalen van x = a tot x = b pakken we dat als volgt aan:

1. We gaan eerst de punten bepalen waar de functie f(x) = 0.
2. Pak voor de stukken waar f(x) > 0 de integraal en pak voor de stukken waar f(x)<0 het tegengestelde van de integraal.
3. Tel alle stukken op.

Voorbeeld:

Bereken de oppervlakte tussen de x-as en de functie $f(x) = \sin(x)$ van $x = -\frac{\pi}{4}$ tot $x = \frac{\pi}{2}$

We moeten de echte oppervlakte berekenen (geen aanhalingstekens).
We kijken eerst waar de functie positief is en zien dat het omslagpunt bij x = 0 ligt.



Figuur 2.8 sinus

Dus oppervlakte $= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin(x)|dx = -\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \sin(x)dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = -\left[-\cos(x)\right]_{x=-\frac{\pi}{4}}^{0} + \left[-\cos(x)\right]_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} =$

$$= -\left(-\cos(0) - -\cos(-\tfrac{\pi}{4})\right) + \left(-\cos(\tfrac{\pi}{2}) - -\cos(0)\right) = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} + 0 + 1 \approx 1{,}29$$

Opgave 14

Bereken de echte oppervlakte tussen de x-as en

a: de functie $f(x) = 1 - e^{(x-2)}$ van $x = 1$ tot $x = 3$.

b: de functie $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ van $x = 0$ tot $x = 4$.

Opgave 15

Bereken de echte oppervlakte tussen de x-as en

a: de functie $f(x) = \sin(x)$ van $x = 0$ tot $x =$.

b: de functie $f(x) = \sin(x)$ van $x =$ tot $x = 2$.

c: de functie $f(x) = -x^2 + x + 2$ van $x = -2$ tot $x = 4$

d: de functie $f(x) = 2x\cos(x^2)$ van $x = 0$ tot $x = \sqrt{}$

Opgave 16

Bereken de echte oppervlakte tussen van het gebied ingesloten door de functies $y = \sqrt{8x}$ en $y = x^2$

Opgave 17

Gegeven is dat de oppervlakte tussen de grafiek $y = x^2 - 4x + 5$, de x-as, de y-as en de lijn $x = a$ gelijk is aan 6. Verder is gegeven dat a positief is.

Bereken de waarde van a

2.5 Oneigenlijke integralen

Wat moeten we doen als de integrand f(x) of de primitieve F(x) in één of meerdere punt op het integratiegebied niet bestaat?

We pakken dit als volgt aan:

- We vervangen in de integraal de probleemwaarde door een letter a.
- We rekenen de integraal met de letter a als parameter.
- We laten daarna de letter a naar de probleemwaarde gaan,
  Dus we rekenen een limiet uit voor $\lim\limits_{a\,\ldots}$ .... of $\lim\limits_{a\,\ldots}$ .... of $\lim\limits_{a\uparrow\ldots}$ ....

Als de limiet eindig is, dan zeggen we dat de integraal bestaat.

Als de limiet niet eindig is zeggen we dat de integraal niet bestaat

Voorbeelden:

a: De integrand $f(x) = \frac{1}{x}$ bestaat niet in x = 0,

Dus $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ is een oneigenlijke integraal.

We moeten nu uitrekenen:

$\lim\limits_{a\,0} \int_a^1 \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{a\,0}\left[\ln(x)\right]_{x=a}^{1} = \lim\limits_{a\,0}(\ln(1) - \ln(a)) = 0 - - \quad = \quad$, dus bestaat de integraal niet.

b: In de integrand $f(x) = \frac{1}{x}$ mogen we niet invullen.

Dus $\int_1 \frac{1}{x}dx$ is een oneigenlijke integraal.

We moeten nu uitrekenen:

$\lim\limits_{a} \int_1^a \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{a}\left[\ln(x)\right]_{x=1}^{a} = \lim\limits_{a}(\ln(a) - \ln(1)) = \quad - 0 = \quad$, dus bestaat de integraal niet.

c: De integrand $f(x) = \frac{1}{x^2}$ bestaat niet in x = 0.

Dus $\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$ is een oneigenlijke integraal.

We moeten nu uitrekenen:

$\lim\limits_{a\,0} \int_a^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{a\,0}\left[-\frac{1}{x}\right]_{x=a}^{1} = \lim\limits_{a\,0}\left(-\frac{1}{1} - -\frac{1}{a}\right) = \quad$, dus bestaat de integraal niet.

d: In de integrand $f(x)=\frac{1}{x^2}$ mogen we niet invullen.

Dus $\int_1 \frac{1}{x^2}dx$ is een oneigenlijke integraal.

We moeten nu uitrekenen:

$\lim\limits_{a} \int_1^a \frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{a} \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^{a} = \lim\limits_{a}\left(-\frac{1}{a} - -\frac{1}{1}\right) = 1$, dus bestaat de integraal wel.

Opgave 18

Bereken:

a: $\int_0 e^{-x}dx$

b: $\int_0 e^{x}dx$

c: $\int_0^2 x\ln(x)dx$

d: $\int_0^{\frac{}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$

2.6 Gemengde opgaven

Opgave 19

Gegeven zijn de volgende onbepaalde of bepaalde integralen.

1: $\int_0^1 x^2(x^3+1)^3\,dx$	2: $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$	3: $\int_1^2 x\sqrt{1+x^2}\,dx$
4: $\int x\ln(x)\,dx$	5: $\int_0^1 x^3\,dx$	6: $\int x\cos(x)\,dx$
7: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(x)\,dx$	8: $\int_1^2 x^2e^{2x}\,dx$	9: $\int e^{-5x}\,dx$
10: $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2}\,dx$	11: $\int 50\cos(3t)\,dt$	12: $\int_0^2 \frac{\ln(x)}{x}\,dx$
13: $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$	14: $\int x^2e^x\,dx$	15: $\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$
16: $\int_1^3 \frac{x^2+3x-4}{x-1}\,dx$	17: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin(x)\,dx$	18: $\int_4^2 \arctan(x)\,dx$
19: $\int \cos^2(x)\sin(x)\,dx$	20: $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$	21: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin(3x)-\cos(2x))\,dx$
22: $\int_1^2 (x^2+e^{4x})\,dx$	23: $\int_1^2 x^2\ln(x)\,dx$	24: $\int_0^1 \frac{x}{(x+4)^2+4}\,dx$

a: Ga bij elke integraal na welke techniek je als eerste wilt toepassen om hem op te lossen.
Alleen het nummer van de techniek aangeven is voldoende, bijv 1, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 of 2.5.

b: b1: Probeer elke integraal op te lossen met de aangegeven techniek. Ga na elke stap na, welke techniek dan weer toegepast moet worden.

b2: Als dit niet lukt ga na waarom niet.
Bepaal dan een andere techniek en probeer hem daarmee opnieuw op te lossen.

Opgave 20

Een voorwerp valt van een hoogte van 490 meter naar beneden.
De snelheid van het voorwerp $v(t) = 9,8t$.

a: Bereken de afgelegde weg na 5 seconden. Bedenk dat $s'(t) = v(t)$

b: Bereken de afgelegde weg $s(t)$ als functie van de tijd. Bedenk dat $s'(t) = v(t)$

c: Hoe lang duurt het om de 490 meter af te leggen? Gebruik je antwoord van b.

Opgave 21

Een auto rijdt 10 m/s: De 10 seconden daarop trekt de auto op met 2 m/s²

a: Wat is $v(0)$, $a(t)$ en $s(0)$?

b: Wat is de afgelegde weg in deze 10 seconden?

Tip: $v(t) - v(0) = \int_0^t a(x)dx$ en

$$s(t) - s(0) = \int_0^t v(x)dx$$

3 Uitwerkingen

Hoofdstuk 2

Opgave 1

a: tekenen zelf doen. “Oppervlakte”=”rechthoek”+”driehoek”= $3\ 6+\frac{1}{2}\ 6\ 6=18+18=36$

b: tekenen zelf doen. “Oppervlakte”=”driehoek”+”driehoek”= $\frac{1}{2}\ 4\ 8+\frac{1}{2}\ 4\ -8=16-16=0$

c: tekenen zelf doen. “Oppervlakte”=”rechthoek”= $4\ 3=12$

d: tekenen zelf doen. “Oppervlakte”=”driehoek”+”driehoek”= $\frac{1}{2}\ \frac{7}{2}\ -7+\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 1=-12$

Opgave 2

a: $F'(x)=\left(3x+\frac{1}{2}x^2\right)'=(3x)'+\left(\frac{1}{2}x^2\right)'=3(x)'+\frac{1}{2}(x^2)'=3x^0+\frac{1}{2}2x^1=3+x=f(x)$

$F(b)-F(a)=F(6)-F(0)=\left(3\ 6+\frac{1}{2}\ 6^2\right)-\left(3\ 0+0^2\right)=36$

b: $F'(x)=\left(6x-x^2+5\right)'=(6x)'-(x^2)'+(5)'=6(x)'-(x^2)'+(5)'=6x^0-2x^1+0=6-2x=f(x)$

$F(b)-F(a)=F(7)-F(-1)=\left(6\ 7-7^2+5\right)-\left(6\ -1-(-1)^2+5\right)=-2+2=0$

c: $F'(x)=(3x)'=3(x)'=3x^0=3=f(x)$

$F(b)-F(a)=F(-1)-F(-5)=3\ -1-3\ -5=12$

d: $F'(x)=\left(x^2-7x\right)'=(x^2)'-(7x)'=(x^2)'-7(x)'=2x^1-7x^0=2x-7=f(x)$

$F(b)-F(a)=F(6)-F(0)=\left(4^2-7\ 4\right)-\left(0^2-7\ 0\right)=-12$

Opgave 3

a: Grootheid $s(t)$ = “oppervlakte” tussen de grafiek van $v(t)$ en t-as van $t_{begin}=a$ tot $t_{eind}=b$.
Maak een verdeling in n gelijke delen van het interval [a,b], breedte $\Delta t = (b-a)/n$,
Dit levert een verdeling: $t_1=a$, $t_2=a+\Delta t$, $t_3=a+2\Delta t$, . . . , $t_{n+1}=b$, (algemeen $t_i=a+(i-1)\Delta t$)
Dan geldt:
Bijdrage van $[t_i, t_{i+1}]$ is : $v(t_i)\Delta t=(6t_i+4)\Delta t$

Dus $s(t)\ \sum_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t=\sum_{i=1}^{n}(6t_i+4)\Delta t$

Dus $s(t)=\lim_{n}\sum_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t=\lim_{n}\sum_{i=1}^{n}(6t_i+4)\Delta t$

b: $t_i=a+(i-1)\Delta t$ en $\Delta t=\frac{b-a}{n}$, dus $t_i=a+(i-1)\frac{b-a}{n}$

$s(t)=\lim_{n}\sum_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t=\lim_{n}\sum_{i=1}^{n}(6t_i+4)\Delta t=\lim_{n}\sum_{i=1}^{n}\left(6\left(a+(i-1)\frac{b-a}{n}\right)+4\right)\frac{b-a}{n}$

Opgave 4

a: Grootheid $m(x)$ = “oppervlakte” tussen de grafiek van $p(x)$ en x-as van $x_{begin}=a$ tot $x_{eind}=b$.
Maak een verdeling in n gelijke delen van het interval [a,b], breedte $\Delta x = (b-a)/n$,
Dit levert een verdeling: $x_1=a$, $x_2=a+\Delta x$, $x_3=a+2\Delta x$, . . . , $x_{n+1}=b$, (algemeen $x_i=a+(i-1)\Delta x$)

Dan geldt:

Bijdrage van [x_i , x_{i+1}] is : $p(x_i)\Delta x = 6x_i\Delta x$

Dus $m(x) \approx \sum_{i=1}^{n} p(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} 6x_i\Delta x$

Dus $m(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} p(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 6x_i\Delta x$

b: $x_i = a + (i-1)\Delta x$ en $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, dus $x_i = a + (i-1)\frac{b-a}{n}$

$$m(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} p(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 6x_i\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 6\left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

Opgave 5

a: $F'(x) = \left(5x^2 + \cos(3x) + 3e^{2x}\right)' = \left(5x^2\right)' + \left(\cos(3x)\right)' + \left(3e^{2x}\right)' = 5\left(x^2\right)' + \left(\cos(3x)\right)' + 3\left(e^{2x}\right)' =$

$5 \cdot 2x^1 - 3\sin(3x) + 3 \cdot 2e^{2x} = 10x - 3\sin(3x) + 6e^{2x} = f(x)$. Ja dus.

b: $F'(x) = \left(\tan(x) - \ln(x) + \frac{1}{x}\right)' = \left(\tan(x)\right)' - \left(\ln(x)\right)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \neq f(x)$

Opgave 6

a: $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$

b: $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

c: $F(x) = \frac{1}{7}\sin(7x) + C$

d: $F(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C$

e: $F(x) = \frac{1}{2e+1}x^{2e+1} + C$

f: $F(x) = tx + C$

g: $F(x) = -2e^{\frac{\;}{2}} + C$

h: $F(t) = \frac{1}{5}\tan(5t) + C$

i: $F(x) = \frac{1}{2}\arctan(\frac{x}{2}) + C$

Opgave 7

a: $F(x) = 3x + \frac{1}{2}x^2 + C$

b: $F(x) = 6x - x^2 + C$

c: $F(x) = 3x + C$

d: $F(x) = x^2 - 7x + C$

e: $F(x) = 5x^2 + \cos(3x) + 3e^{2x}$

Opgave 8

a: $F(x) = 6\int e^{-3x}dx = -2e^{-3x} + C$

b: $F(s) = 8\int s^6 ds = \frac{8}{7}s^7 + C$

c: $F(x) = 4\int x^{-5}dx = 4 \cdot -\frac{1}{4}x^{-4} + C = -x^{-4} + C$

d: $F(x) = 5\int \frac{1}{2^2 + x^2}dx = 5 \cdot \frac{1}{2}\arctan(\frac{x}{2}) + C = \frac{5}{2}\arctan(\frac{x}{2}) + C$

e: $F(x) = 3\int \sin(4x)dx = 3 \cdot -\frac{1}{4}\cos(4x) + C = -\frac{3}{4}\cos(4x) + C$

f: $Fx) = \int \sin(ex)dx + e\int \sin(x)dx + \sin(e)\int x dx = -\frac{1}{e}\cos(ex) - e\cos(x) + \sin(e) \cdot \frac{1}{2}x^2 + C$

g: $F(x) = 3\int \sin(4x)dx - 4\int \cos(3x)dx = -\frac{3}{4}\cos(4x) - \frac{4}{3}\sin(3x) + C$

h: $F(t) = x\int \frac{1}{t}dt = x\ln(t) + C$

i: $F(x) = \frac{1}{3t}\int xdx = \frac{1}{3t}\,\frac{1}{2}x^2 + C = \frac{x^2}{6t} + C$

j: $F(x) = \int e^x dx - \int e^{-x}dx = e^x + e^{-x} + C$

k: $F(x) = -2\int e^{-2x}dx + 2\int \frac{1}{x}dx = e^{-2x} + 2\ln(x) + C$

l: $F(x) = s\int e^{2x}dx = \frac{s}{2}e^{2x} + C$

m: $F(x) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx - \int \cos\left(\frac{2}{3}x\right)dx = \frac{1}{2}\ln(x) - \frac{3}{2}\sin\left(\frac{2}{3}x\right) + C$

n: $F(t) = \frac{x}{3}\int \frac{1}{t}dt = \frac{x}{3}\ln(t) + C$

Opgave 9

a: $\int 2x(x^2+1)^3 dx = \int y^3 dy = \frac{1}{4}y^4 + C = \frac{1}{4}(x^2+1)^4 + C$

b: $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(t)\sin^2(t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} y^2 dy = \left[\frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}0 = \frac{1}{24}$

$\uparrow$

$y = \sin(t)$ en $dy = \cos(t)dt$

$t_0 = 0 \Rightarrow y_0 = \sin(0) = 0$

$t_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow y_1 = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

c: $\int_1^2 \frac{2t}{t^2+4}dt = \ldots\ldots\ldots = \left[\ln(y)\right]_{y=5}^{8} = \ldots. = \ln(\frac{8}{5}) \approx 0.47$

$\uparrow$

$y = t^2 + 4$ en $dy = 2tdt$

$t_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 5$

$t_1 = 2 \Rightarrow y_1 = 8$

d: $\int \frac{2t}{\cos^2(t^2+4)}dt = \int \frac{1}{\cos^2(y)}dy = \tan(y) + C = \tan(t^2+4) + C$

$\uparrow$

$y = t^2 + 4$ en $dy = 2tdt$

e: $\int 2x(x^2+1)dx = \int y\,dy = \frac{1}{2}y^2 + C = \frac{1}{2}(x^2+1)^2 + C$

$\uparrow \qquad \uparrow$

$y = x^2+1$ en $dy = 2x\,dx \qquad y = x^2+1$

f: $\int t\cos(t^2+3)dt = \frac{1}{2}\int 2t\cos(t^2+3)dt = \frac{1}{2}\int \cos(y)dy = \frac{1}{2}\sin(y) + C = \frac{1}{2}\sin(t^2+3) + C$

$\uparrow$

$y = t^2+3$ en $dy = 2t\,dt$

g: $\int (t^3+t+1)\sqrt{t^4+2t^2+4t}\,dt = \frac{1}{4}\int (4t^3+4t+4)\sqrt{t^4+2t^2+4t}\,dt =$

$\uparrow$

$y = t^4+2t^2+4t$ en $dy = \left(4t^3+4t+4\right)dt$

$\frac{1}{4}\int \sqrt{y}\,dy = \frac{1}{4}\,\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{6}\left(t^4+2t^2+4t\right)^{\frac{3}{2}} + C$

Opgave 10

a: $\int x\sin(x)dx = -x\cos(x) - \int 1\,\,-\cos(x)dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x) + C$

$\uparrow$

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = \sin(x) \Rightarrow g(x) = -\cos(x)$

b: $\int_1^2 t\ln(t)dt = \left[\frac{1}{2}t^2\ln(t)\right]_{t=1}^{2} - \int_1^2 \frac{1}{2}t^2\,\frac{1}{t}dt = \left[\frac{1}{2}t^2\ln(t)\right]_{t=1}^{2} - \frac{1}{2}\int_1^2 t\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\ln(t)\right]_{t=1}^{2} - \left[\frac{1}{4}t^2\right]_{t=1}^{2} =$

$\uparrow$

$f(t) = \ln(t) \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t}$

$g'(t) = t \Rightarrow g(t) = \frac{1}{2}t^2$

$\left(\frac{1}{2}2^2\ln(2) - \frac{1}{2}1^2\ln(1)\right) - \left(\frac{1}{4}2^2 - \frac{1}{4}1^2\right) = 2\ln(2) - \frac{3}{4}$

c: $\int_1^2 x^2e^x dx = \left[x^2e^x\right]_{x=1}^{2} - \int_1^2 2xe^x dx = \left[x^2e^x\right]_{x=1}^{2} - \left(\left[2xe^x\right]_{x=1}^{2} - \int_1^2 2e^x dx\right) =$

$\uparrow \qquad \uparrow$

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \qquad f(x) = 2x \Rightarrow f'(x) = 2$

$g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x \qquad g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$

$\left[x^2e^x\right]_{x=1}^{2} - \left[2xe^x\right]_{x=1}^{2} + \left[2e^x\right]_{x=1}^{2} = (4e^2 - e) - (4e^2 - 2e) + (2e^2 - 2e) = 2e^2 - e$

d: $\int (x+1)e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \int 1\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$

$\uparrow$

$f(x) = x+1 \Rightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = e^{2x} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

e: $\int_1^2 \ln(t)dt = \int_1^2 \ln(t)\cdot 1dt = \left[\ln(t)\cdot t\right]_{t=1}^2 - \int_1^2 \frac{1}{t}\cdot t dt = \left[t\ln(t)\right]_{t=1}^2 - \int_1^2 1dt =$

$\uparrow$

$f(t) = \ln(t) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{t}$

$g'(t) = 1 \Rightarrow g(t) = t$

$\left[t\ln(t)\right]_{t=1}^2 - \left[t\right]_{t=1}^2 = (2\ln(2) - 0) - (2-1) = 2\ln(2) - 1$

f: $\int_1^2 (x+3)^2 e^x dx = \left[(x+3)^2 e^x\right]_{x=1}^2 - \int_1^2 2(x+3)e^x dx =$

$\uparrow$ $\uparrow$

$f(x) = (x+3)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(x+3)$ $f(x) = 2(x+3) \Rightarrow f'(x) = 2$

$g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$ $g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$

$\left[(x+3)^2 e^x\right]_{x=1}^2 - \left(\left[2(x+3)e^x\right]_{x=1}^2 - \int_1^2 2e^x dx\right) = \left[(x+3)^2 e^x\right]_{x=1}^2 - \left[2(x+3)e^x\right]_{x=1}^2 + \int_1^2 2e^x dx =$

$\left[(x+3)^2 e^x\right]_{x=1}^2 - \left[2(x+3)e^x\right]_{x=1}^2 + \left[2e^x\right]_{x=1}^2 = \left(25e^2 - 16e\right) - \left(10e^2 - 8e\right) + \left(2e^2 - 2e\right) =$

$25e^2 - 10e^2 + 2e^2 - 16e + 8e - 2e = 17e^2 - 10e$

Opgave 11

a: $\sqrt{3}\int \sqrt{x}dx + \int (e^{3x})^{\frac{1}{2}}dx = \sqrt{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx + \int e^{\frac{3}{2}x}dx = \sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}x} + C = \frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot x\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{e^{3x}} + C$

b: $3\int \frac{1}{x}dx + 15\int x^{-2}dx = 3\ln(x) + 15\cdot -1x^{-1} + C = 3\ln(x) - \frac{15}{x} + C$

c: $\frac{x}{3}\int \frac{1}{t}dt = \frac{x}{3}\ln(t) + C$

d: $3e\int e^{-13x}dx = 3e\cdot -\frac{1}{13}e^{-13x} + C = -\frac{3}{13}e^{1-13x} + C$

Opgave 12

a: $F(t) = \int \frac{3t^2 + 15t}{t^{\frac{1}{2}}}dt = 3\int t^{\frac{3}{2}}dt + 15\int t^{\frac{1}{2}}dt = 3\cdot\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + 15\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{6}{5}t^2\sqrt{t} + 10t\sqrt{t} + C$

b: $F(x) = 3t\int x^{\frac{1}{2}}dx = 3t\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = 2tx\sqrt{x} + C$

c: $\int_1^4 \frac{\cos(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}dt = \int_1^2 \cos(y)dy = \left[\sin(y)\right]_{y=1}^2 = \sin(2) - \sin(1)$

$$\Downarrow$$

$y=\sqrt{t}$ en $dy=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt$

$x_0=1 \Rightarrow y_0=1$

$x_1=4 \Rightarrow y_1=2$

d: $\int x^2\cos(x)dx = x^2\sin(x)-\int 2x\sin(x)dx = x^2\sin(x)-\left(-2x\cos(x)-\int 2\ \ -\cos(x)dx\right)=$

$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$

$f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x \qquad f(x)=2x \Rightarrow f'(x)=2$

$g'(x)=\cos(x) \Rightarrow g(x)=\sin(x) \qquad g'(x)=\sin(x) \Rightarrow g(x)=-\cos(x)$

$x^2\sin(x)+2x\cos(x)-2\sin(x)+C$

e: $\int_0^1 \dfrac{2x}{1+x^2}dx = \int_1^2 \dfrac{1}{y}dy = [\ln(y)]_{y=1}^{2} = \ln(2)$

$$\Downarrow$$

$y=1+x^2$ en $dy=2xdx$

$x_0=0 \Rightarrow y_0=1$

$x_1=1 \Rightarrow y_1=2$

f: $\int_0^1 \dfrac{2}{2x+3}dx = \int_3^5 \dfrac{1}{y}dy = [\ln(y)]_{y=3}^{5} = ... = \ln(\dfrac{5}{3})$

$$\Downarrow$$

$y=2x+3$ en $dy=2dx$

$x_0=0 \Rightarrow y_0=3$

$x_1=1 \Rightarrow y_1=5$

g: $F(t)=\dfrac{1}{13}\int \sin(3t)dt-\dfrac{3}{13}\int \cos(t)dt = -\dfrac{1}{39}\cos(3t)-\dfrac{3}{13}\sin(t)+C$

h: $F(t)=3\sqrt{x}\int tdt=\dfrac{3\sqrt{x}}{2}t^2+C$

i: $\int \dfrac{3\sqrt{t}(\sin^2(3t)+\cos^2(3t))}{2}dt=\int \dfrac{3}{2}\sqrt{t}dt=t^{\frac{3}{2}}+C$

j: $\int_0^{\ /3} \dfrac{-\sin x}{\cos x}dx = \int_1^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{y}dy = [\ln(y)]_{y=1}^{\frac{1}{2}} = ... = -\ln(2)$

$$\Downarrow$$

$y=\cos(x)$ en $dy=-\sin(x)dx$

$x_0=0 \Rightarrow y_0=1$

$x_1=\dfrac{\ }{3} \Rightarrow y_1=\dfrac{1}{2}$

k: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x \cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{y}\,dy = \left[\ln(y)\right]_{y=1}^2 = \ln(2)$

$y = 1+\sin^2(x)$ en $dy = 2\sin(x)\cos(x)dx$

$x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$

$x_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y_1 = 2$

l: $\displaystyle\int_0^1 2\sin t \cos t\,dt = \int_0^1 \sin(2t)dt = \left[-\frac{1}{2}\cos(2t)\right]_{t=0}^1 = -\frac{1}{2}\cos(2) + \frac{1}{2}$

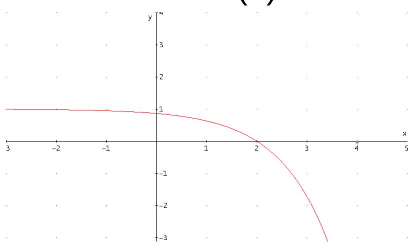
Opgave 13

a: $0 \le t \le 25$ sec: v(t) = 0,2 liter/s
We hebben een constante stroom dus volume = v*tijd=0.2*25=5 liter

b: $25 \le t \le 35$ sec: $v(t) = 0{,}2\, e^{-\frac{t-25}{5}}$ liter/s
We hebben nu geen constante stroom dus:
Verdeel $[25, 35]$ in n gelijke delen ter breedte Δt
Dit levert een verdeling: $t_1 = 25,\ t_2,\ t_3, \ldots\ t_i, \ldots, t_{n+1} = 35$
Bijdrage van strookje i is: $v(t_i)\Delta t = 0{,}2\, e^{-\frac{t_i-25}{5}}\Delta t$
Volume = $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n v(t_i)\Delta t = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n 0{,}2\, e^{-\frac{t_i-25}{5}}\Delta t = \int_{25}^{35} 0{,}2\, e^{-\frac{t-25}{5}}\,dt$
Berekenen we deze integraal met substitutie van $y = -\dfrac{t-25}{5}$ dan vinden we 0,8647 liter.

Opgave 14

a: Teken de functie $f(x) = 1 - e^{(x-2)}$ van x = 1 tot x = 3:



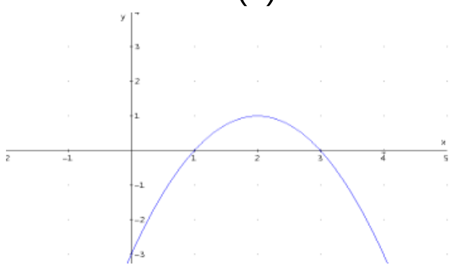
Bereken de nulpunten exact: $f(x) = 1 - e^{x-2} = 0 \Leftrightarrow e^{x-2} = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
Echte oppervlakte =

$\displaystyle\int_1^3 \left|1 - e^{x-2}\right|dx = \int_1^2 (1 - e^{-2}e^x)dx - \int_2^3 (1 - e^{-2}e^x)dx = \left[x - e^{-2}e^x\right]_{x=1}^2 - \left[x - e^{-2}e^x\right]_{x=2}^3 =$

$\left[x - e^{x-2}\right]_{x=1}^2 - \left[x - e^{x-2}\right]_{x=2}^3 = ((2-1) - (1-e^{-1})) - ((3-e) - (2-1)) =$

$(1 - 1 + e^{-1}) - (3 - e - 1) = e + e^{-1} - 2 \approx 1.09$

b: Teken de functie $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ van x = 0 tot x = 4.



Bereken de nulpunten exact:

$f(x) = -x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow -(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow -(x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ of } x = 3$.

Echte oppervlakte =

$$\int_0^4 \left|-x^2 + 4x - 3\right| dx = -\int_0^1 (-x^2 + 4x - 3)dx + \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)dx - \int_3^4 (-x^2 + 4x - 3)dx =$$

$$-\left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x\right]_{x=0}^{1} + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x\right]_{x=1}^{3} - \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x\right]_{x=3}^{4} =$$

$$-((-\frac{1}{3} + 2 - 3) - (0)) + ((-9 + 18 - 9) - (-\frac{1}{3} + 2 - 3)) - ((-\frac{64}{3} + 32 - 12) - (-9 + 18 - 9)) = 4$$

Opgave 15

a: de functie $f(x) = \sin(x)$ is overal positief van $x = 0$ tot $x =$.

Dus oppervlakte = $\int_0 \sin(x)dx = [-\cos(x)]_{x=0} = -\cos(\ ) - -\cos(0) = - -1 + 1 = 2$

b: de functie $f(x) = \sin(x)$ is overal negatief van $x =$ tot $x = 2$.

Dus oppervlakte = $-\int^{2} \sin(x)dx = -[-\cos(x)]_{x=}^{2} = -(-\cos(2\ ) - -\cos(\ )) =$

$-(-1 - - -1) = - -2 = 2$

c: de functie $f(x) = -x^2 + x + 2$ is positief van $x = -1$ tot $x = 2$ negatief van $x = -2$ tot $x = -1$ en van $x = 2$ tot $x = 4$.

Dus de oppervlakte is = $-\int_{-2}^{-1} (-x^2 + x + 2)dx + \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)dx - \int_{2}^{4} (-x^2 + x + 2)dx =$

$$-\left(-\frac{7}{3} + \frac{1}{2}\right) + \frac{9}{2} - -\frac{26}{3} = \frac{33}{3} + \frac{8}{2} = 11 + 4 = 15$$

$$\int_{-2}^{-1} (-x^2 + x + 2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{x=-2}^{-1} =$$

$$\left(-\frac{1}{3}(-1)^3 + \frac{1}{2}(-1)^2 + 2\ \ -1\right) - \left(-\frac{1}{3}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 + 2\ \ -2\right) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) - \left(\frac{8}{3} + 2 - 4\right) = -\frac{7}{3} + \frac{1}{2}$$

$$\int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{x=-1}^{2} =$$

$$\left(-\frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2 + 2\ \ 2\right) - \left(-\frac{1}{3}(-1)^3 + \frac{1}{2}(-1)^2 + 2\ \ -1\right) = \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\int_{2}^{4} (-x^2 + x + 2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{x=2}^{4} = \left(-\frac{1}{3}4^3 + \frac{1}{2}4^2 + 2\ \ 4\right) - \left(-\frac{1}{3}2^3 + \frac{1}{2}2^2 + 2\ \ 2\right) =$$

$$= \left(-\frac{64}{3} + 8 + 8\right) - \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4\right) = -\frac{56}{3} + 10 = -\frac{26}{3}$$

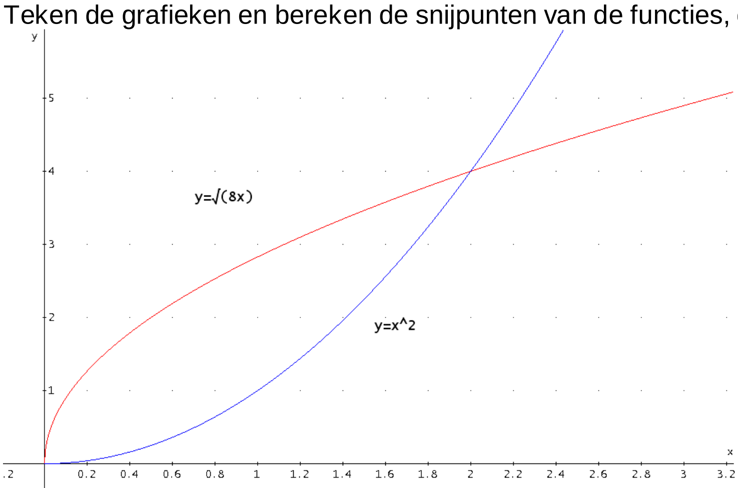
d: de functie $f(x) = 2x\cos(x^2)$ positief van $x = 0$ tot $x = \sqrt{\frac{}{2}}$ en negatief van $x = \sqrt{\frac{}{2}}$ tot $x = \sqrt{\ }$.

Dus oppervlakte = $\int_0^{\sqrt{\frac{}{2}}} 2x\cos(x^2)dx - \int_{\sqrt{\frac{}{2}}}^{\sqrt{\ }} 2x\cos(x^2)dx = \int_0^{\frac{}{2}} \cos(y)dy - \int_{\frac{}{2}} \cos(y)dy =$

$$[\sin(y)]_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} - [\sin(y)]_{x=-\frac{\pi}{2}}^{0} = \left(\sin(\tfrac{\pi}{2}) - \sin(0)\right) - \left(\sin(0) - \sin(-\tfrac{\pi}{2})\right) = 1 + 1 = 2$$

Opgave 16

Teken de grafieken en bereken de snijpunten van de functies, deze bepalen de integratiegrenzen.



$$\sqrt{8x} = x^2 \Leftrightarrow 8x = x^4 \Leftrightarrow x^4 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ of } x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 0 \text{ of } x = 2$$

Dus ingesloten oppervlakte is

$$\int_0^2 \sqrt{8x}\,dx - \int_0^2 x^2 dx = \sqrt{8}\int_0^2 x^{\frac{1}{2}} dx - \int_0^2 x^2 dx = \left[\sqrt{8}\,\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{2} - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{2} = \left(\frac{2\sqrt{8}}{3} 2^{\frac{3}{2}} - 0\right) - \left(\frac{1}{3} 2^3 - 0\right) =$$

$$\frac{2\sqrt{8}}{3}\, 2\sqrt{2} - \frac{8}{3} = \frac{4\sqrt{16}}{3} - \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$$

Merk op dat de oppervlakte is hetzelfde als $\int_0^2 (\sqrt{8x} - x^2)dx$

Opgave 17

De functie is een dalparabool zonder nulpunten, $D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$.

Dus de oppervlakte =

$$\int_0^a (x^2 - 4x + 5)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x\right]_{x=0}^{a} = \left(\frac{1}{3}a^3 - 2a^2 + 5a\right) - 0 = \frac{1}{3}a^3 - 2a^2 + 5a = 6$$

Dus $\frac{1}{3}a^3 - 2a^2 + 5a = 6 \Leftrightarrow a^3 - 6a^2 + 15a = 18 \Leftrightarrow a^3 - 6a^2 + 15a - 18 = 0$

Na proberen volgt dat $a = 3$ een oplossing is. Dus $a^3 - 6a^2 + 15a - 18$ is deelbaar door $a - 3$.
Met staartdeling vinden we:

$a - 3 / a^3 - 6a^2 + 15a - 18 \backslash a^2 - 3a + 6$

$\underline{a^3 - 3a^2}$ –

$-3a^2 + 15a$

$\underline{-3a^2 + 9a}$ –

$6a - 18$

$\underline{6a - 18}$ –

0

Dus $a^3 - 6a^2 + 15a - 18 = 0 \Leftrightarrow (a - 3)(a^2 - 3a + 6) = 0 \Leftrightarrow a = 3 \text{ of } a^2 - 3a + 6 = 0 \Leftrightarrow a = 3$

Immers de tweedegraads vergelijking heeft geen oplossingen want:

$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 9 - 24 = -15$.

Opgave 18

a: $\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x}dx = \lim_{a\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_{x=0}^{a} = \lim_{a\to\infty}\left(-e^{-a} - -e^{-0}\right) = \lim_{a\to\infty}\left(1-e^{-a}\right) = 1$

b: $\int_0^{\infty} e^{x}dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{x}dx = \lim_{a\to\infty}\left[e^{x}\right]_{x=0}^{a} = \lim_{a\to\infty}\left(e^{a} - e^{0}\right) = \lim_{a\to\infty}\left(e^{a}-1\right) =$

c: $\int_0^2 x\ln(x)dx = \lim_{a\downarrow 0}\int_a^2 x\ln(x)dx = \lim_{a\downarrow 0}\left(\left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_{x=a}^{2} - \int_a^2 \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}dx\right) =$

$\lim_{a\downarrow 0}\left(\left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_{t=a}^{2} - \frac{1}{2}\int_a^2 x\,dx\right) = \lim_{a\downarrow 0}\left(\left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_{t=a}^{2} - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_{x=a}^{2}\right) =$

$= \lim_{a\downarrow 0}\left(\left(2\ln(2) - \frac{1}{2}a^2\ln(a)\right) - \left(1 - \frac{1}{4}a^2\right)\right) = 2\ln(2) - 1 =$

1 keer partiële integratie toepassen, zie ook 10b

d: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\int_1^0 \frac{1}{y}dy = \lim_{a\downarrow 0}\int_a^1 \frac{1}{y}dy = \lim_{a\downarrow 0}\left[\ln(y)\right]_{y=a}^{1} = \lim_{a\downarrow 0}\left(\ln(1) - \ln(a)\right) =$

Substitutie, zie ook opgave 12j

Opgave 19

1: Eerst techniek: 2.5 en dan 2.3 en dan 2.1 en dan 1

$$\int_0^1 x^2(x^3+1)^3dx = \frac{1}{3}\int_0^1 3x^2(x^3+1)^3dx = \int_1^2 \frac{1}{3}y^3dy = \frac{1}{3}\int_1^2 y^3dy = \left[\frac{1}{12}y^4\right]_{y=1}^{2} = \frac{15}{12}$$

$$y = x^3+1 \text{ en } dy = 3x^2dx$$

$$x_0 = 0 \quad y_0 = 1 \text{ en } x_1 = 1 \quad y_1 = 2$$

2: Eerst techniek 2.4 en dan 2.1 en dan 1

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = \left[-xe^{-x}\right]_{x=0}^{1} - \int_0^1 -e^{-x}dx = \left[-xe^{-x}\right]_{x=0}^{1} + \int_0^1 e^{-x}dx = \left[-xe^{-x}\right]_{x=0}^{1} + \left[-e^{-x}\right]_{x=0}^{1} = 1-2e^{-1}$$

$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$

$$g'(x) = e^{-x} \Rightarrow g(x) = -e^{-x}$$

3: Eerst techniek 2.3 en dan 2.1 en dan 1

$$\int_1^2 x\sqrt{1+x^2}dx = \int_2^5 \frac{1}{2}\sqrt{y}dy = \frac{1}{2}\int_2^5\sqrt{y}dy = \left[\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_{y=2}^{5} = \frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$y = 1+x^2 \text{ en } dy = 2xdx$$

$$x_0 = 1 \quad y_0 = 2 \text{ en } x_1 = 2 \quad y_1 = 5$$

4: Eerst techniek 2.4 en dan 2.5 en dan 2.1 en dan 1

$$\int x\ln(x)dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \int \frac{1}{x}\frac{1}{2}x^2dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C$$

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = x \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x^2$$

2

5: Techniek 1

$$\int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{4}$$

6: Eerst techniek 2.4 en dan 1

$$\int x\cos(x)dx = x\sin(x) - \int \sin(x)dx = x\sin(x) + \cos(x) + C$$

$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$

$$g'(x) = \cos(x) \Rightarrow g(x) = \sin(x)$$

7: Eerst techniek 2.4 en dan 2.1 en dan 2.2 en dan 1

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(1-\cos(2x))dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos(2x))dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}1dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos(2x)dx =$$

$$\left[\frac{1}{2}x\right]_{x=0}^{\frac{\pi}{3}} - \left[\frac{1}{4}\sin(2x)\right]_{x=0}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{8}\sqrt{3}$$

8: Eerst techniek 2.4 en dan 2.5 en dan 2.4 en dan 2.1 en dan 1

$$\int_1^2 x^2e^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}x^2e^{2x}\right]_{x=1}^{2} - \int_1^2 2x\frac{1}{2}e^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}x^2e^{2x}\right]_{x=1}^{2} - \int_1^2 xe^{2x}dx =$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \qquad f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$

$$g'(x) = e^{2x} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \qquad g'(x) = e^{2x} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\left[\frac{1}{2}x^2e^{2x}\right]_{x=1}^{2} - \left(\left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_{x=1}^{2} - \int_1^2 \frac{1}{2}e^{2x}dx\right) = \left[\frac{1}{2}x^2e^{-2x}\right]_{x=1}^{2} - \left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_{x=1}^{2} + \frac{1}{2}\int_1^2 e^{2x}dx =$$

$$\left[\frac{1}{2}x^2e^{2x}\right]_{x=1}^{2} - \left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_{x=1}^{2} + \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_{x=1}^{2} = \frac{5}{4}e^4 - \frac{1}{4}e^2$$

9: Techniek 1

$$\int e^{-5x}dx = -\frac{1}{5}e^{-5x} + c$$

10: Eerst techniek 2.5 en dan 2.2 en dan 2.5 en dan 1

$$\int_1^2 \frac{x+1}{x^2}dx = \int_1^2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx = \int_1^2\frac{1}{x}dx + \int_1^2\frac{1}{x^2}dx = \int_1^2\frac{1}{x}dx + \int_1^2 x^{-2}dx = \left[\ln(x)\right]_{x=1}^{2} + \left[-x^{-1}\right]_{x=1}^{2} = \ln(2) + \frac{1}{2}$$

11: Eerst techniek 2.1 en dan 1

$$\int 50\cos(3t)dt = 50\int\cos(3t)dt = \frac{50}{3}\sin(3t) + C$$

12: Eerst techniek 2.3 en dan 1

$$\int_0^2 \frac{\ln(x)}{x}dx = \lim_{a\to 0}\int_a^2\frac{\ln(x)}{x}dx = \lim_{a\to 0}\left(\frac{1}{2}\ln^2(2) - \frac{1}{2}\ln^2(a)\right) = -\infty \quad \text{dus bestaat niet}$$

$$\int_a^2 \frac{\ln(x)}{x}dx = \int_{\ln(a)}^{\ln(2)} y\,dy = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=\ln(a)}^{\ln(2)} = \frac{1}{2}\ln^2(2) - \frac{1}{2}\ln^2(a)$$

$y = \ln(x)$ en $dy = \frac{1}{x}dx$

$x_0 = a \quad y_0 = \ln(a)$ en $x_1 = 2 \quad y_1 = \ln(2)$

Vervolg opgave 19

13: Eerst techniek 2.3 en dan 2.5 en dan 2.2 en dan 1

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx = \int_1^2 \frac{(y-1)^2}{y}dy = \int_1^2 \frac{y^2-2y+1}{y}dy = \int_1^2 (y-2+\frac{1}{y})dy = \int_1^2 ydy - \int_1^2 2dy + \int_1^2 \frac{1}{y}dy =$$

$y = x+1$ en $dy = dx$ en $(y-1)^2 = x^2$

$x_0 = 0 \quad y_0 = 1$ en $x_1 = 1 \quad y_1 = 2$

$$\int_1^2 ydy - \int_1^2 2dy + \int_1^2 \frac{1}{y}dy = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=1}^2 - \left[2y\right]_{y=1}^2 + \left[\ln(y)\right]_{y=1}^2 = \frac{1}{2}2^2 - \frac{1}{2}1^2 - (4-2) + \ln(2) - 0 = \ln(2) - \frac{1}{2}$$

14: Eerst techniek 2.4 en dan 2.1 en dan 2.4 en dan 1

$$\int x^2e^xdx = x^2e^x - \int 2xe^xdx = x^2e^x - 2\int xe^xdx = x^2e^x - 2(xe^x - \int e^xdx) =$$

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \qquad f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x \qquad g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$

$$x^2e^x - 2(xe^x - e^x) + C = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

15: Eerst techniek 2.3 en dan 1

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}dx = \int \frac{1}{y}dy = \ln(y) + C = \ln(\ln(x)) + C$$

$y = \ln(x)$ en $dy = \frac{1}{x}dx$

16: Eerst techniek 2.3 en dan 2.2 en dan 1

$$\int_1^3 \frac{x^2+3x-4}{x-1}dx = \lim_{a \to 1}\int_1^3 \frac{x^2+3x-4}{x-1}dx = \lim_{a \to 1}(\frac{9}{2} - \frac{a^2}{2} + 12 - 4a) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} + 12 - 4 = 12$$

$$\int_a^3 \frac{x^2+3x-4}{x-1}dx = \int_a^3 \frac{(x+4)(x-1)}{x-1}dx = \int_a^3 (x+4)dx = \int_a^3 xdx + \int_a^3 4dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x=a}^3 + \left[4x\right]_{x=a}^3 =$$

$$\frac{9}{2} - \frac{a^2}{2} + 12 - 4a$$

17: Eerst techniek 2.4 en dan 2.1 en dan 1

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin(x)dx = \left[-x\cos(x)\right]_{x=0}^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\cos(x)dx = \left[-x\cos(x)\right]_{x=0}^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)dx =$$

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = \sin(x) \Rightarrow g(x) = -\cos(x)$

$$\left[-x\cos(x)\right]_{x=0}^{\frac{\pi}{4}} + \left[\sin(x)\right]_{x=0}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{4\,2}\sqrt{2} - -0 + \frac{1}{2}\sqrt{2} - 0 = (\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8})\sqrt{2}$$

18: Eerst techniek 2.4 dan 2.3 en dan 2.1 en dan 1

$$\int_4^2 \arctan(x)dx = \left[x\arctan(x)\right]_{x=4}^2 - \int_4^2 \frac{1}{x^2+1}\,xdx = \left[x\arctan(x)\right]_{x=4}^2 - \int_4^2 \frac{1}{2}\frac{1}{y}dy =$$

$f(x) = \arctan(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \qquad y = x^2+1$ en $dy = 2xdx$

$g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = x \qquad x_0 = 4 \quad y_0 = 17$ en $x_1 = 2 \quad y_1 = 5$

$$\left[x\arctan(x)\right]_{x=4}^2 - \frac{1}{2}\int_4^2 \frac{1}{y}dy = \left[x\arctan(x)\right]_{x=4}^2 - \left[\frac{1}{2}\ln(y)\right]_{y=17}^5 =$$

$$2\arctan(2) - 4\arctan(4) + \frac{1}{2}\ln(\frac{17}{5}) =$$

19: Eerst techniek 2.3 en dan 2.1 en dan 1

$$\int \cos^2(x)\sin(x)dx = \int -y^2 dy = -\int y^2 dy = -\frac{1}{3}y^3 + C = -\frac{1}{3}\cos^3(x) + C$$

$$y = \cos(x) \text{ en } dy = -\sin(x)dx$$

20: Eerst techniek 2.3 en dan 1

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1}dx = \int \frac{1}{y}dy = \ln(y) + C = \ln(e^x + 1) + C$$

$$y = e^x + 1 \text{ en } dy = e^x dx$$

21: Eerst techniek 2.2 en dan 1

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin(3x) - \cos(2x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(3x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)dx = \left[-\frac{1}{3}\cos(3x)\right]_{x=0}^{\frac{\pi}{4}} - \left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{x=0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{1}{6}$$

22: Eerst techniek 2.2 en dan 1

$$\int_1^2 (x^2 + e^{4x})dx = \int_1^2 x^2 dx + \int_1^2 e^{4x}dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=1}^2 + \left[\frac{1}{4}e^{4x}\right]_{x=1}^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}e^8 - \frac{1}{4}e^4) = \frac{7}{3} + \frac{1}{4}(e^8 - e^4)$$

23: Eerst techniek 2.4 en dan 1

$$\int_1^2 x^2 \ln(x)dx = \left[\ln(x)\ \frac{1}{3}x^3\right]_{x=1}^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\ \frac{1}{3}x^3 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_{x=1}^2 - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2 dx =$$

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = x^2 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{3}x^3$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_{x=1}^2 - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=1}^2 = \frac{8}{3}\ln(2) - 0 - (\frac{8}{9} - \frac{1}{9}) = \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{7}{9}$$

24: Eerst techniek 2.3 en dan 2.5 en dan 2.3 en dan 2.5 en dan 1

$$\int_0^1 \frac{x}{(x+4)^2 + 4}dx = \int_4^5 \frac{y-4}{y^2+4}dy = \int_4^5 \frac{y}{y^2+4}dy - 4\int_4^5 \frac{1}{y^2+4}dy = \int_{20}^{29} \frac{1}{z}\ \frac{1}{2}dz - 4\int_4^5 \frac{1}{y^2+4}dy =$$

$y = x + 4$ en $dy = dx$ en $y - 4 = x$ $\quad$ $z = y^2 + 4$ en $dz = 2ydy$

$x_0 = 0$ $\quad$ $y_0 = 4$ en $x_1 = 1$ $\quad$ $y_1 = 5$ $\quad$ $y_0 = 4$ $\quad$ $z_0 = 20$ en $y_1 = 5$ $\quad$ $z_1 = 29$

$$\frac{1}{2}\int_{20}^{29} \frac{1}{z}\ dz - 4\int_4^5 \frac{1}{y^2 + 2^2}dy = \left[\frac{1}{2}\ln(z)\right]_{z=20}^{29} - \left[4\ \frac{1}{2}\arctan(\frac{y}{2})\right]_{y=4}^5 =$$

$$\frac{1}{2}\ln(29) - \frac{1}{2}\ln(20) - (2\arctan(\frac{5}{2}) - 2\arctan(2)) = \frac{1}{2}\ln(\frac{29}{20}) - 2\arctan(\frac{5}{2}) + 2\arctan(2)$$

Opgave 20

a: $s'(t) = v(t) \Rightarrow s(5) = \int_0^5 v(t)dt = \int_0^5 9,8tdt = \left[4,9t^2\right]_{t=0}^{5} = 4,9 \cdot 25 = 122,5$ meter

b: $s'(t) = v(t) \Rightarrow s(t) = \int_0^t v(x)dx = \int_0^t 9,8xdx = \left[4,9x^2\right]_{x=0}^{t} = 4,9t^2$

c: $4,9t^2 = 490 \Leftrightarrow t^2 = \dfrac{490}{4,9} = 100 \Leftrightarrow t = -\sqrt{100} = -10$ of $t = \sqrt{100} = 10$ seconden.

$t = -10$ valt af, dus na 10 seconden op de grond.

Opgave 21

a: $v(0) = 10$, $a(t) = 2$ en $s(0)$ is onbekend

b: $v(t) - v(0) = \int_0^t a(x)dx \Leftrightarrow v(t) = 10 + \int_0^t 2dx = 10 + \left[2x\right]_{x=0}^{t} = 10 + 2t$

de afgelegde weg in deze 10 seconden = $s(10) - s(0) = \int_0^{10} v(x)dx = \int_0^{10} (10 + 2x)dx = \left[10x + x^2\right]_{x=0}^{10} =$

$= (100 + 100) - (0 + 0) = 200$ meter