Theorie Wiskunde Optimaliseren

Voorbeelden

[bewerken]

Voorbeeld 1

We beschouwen de functie *(zie figuur rechts)*

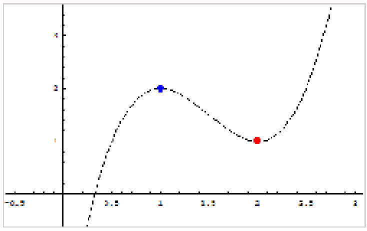
$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3.$$

We berekenen de eerste afgeleide, stellen deze gelijk aan 0 en lossen op naar x om mogelijke extrema te zoeken

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \;\vee\; x = 2$$

Om na te gaan of er in deze punten extrema bereikt worden bepalen we het teken van de tweede afgeleide voor beide punten

$$f''(x) = 12x - 18$$
$$f''(1) = -6 < 0 \Rightarrow \text{ maximum } \textit{(blauw)}$$
$$f''(2) = +6 > 0 \Rightarrow \text{ minimum } \textit{(rood)}$$



Grafiek van de functie
f(*x*) = $2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$

Voorbeeld 2

We beschouwen de functie *(zie figuur rechts)*

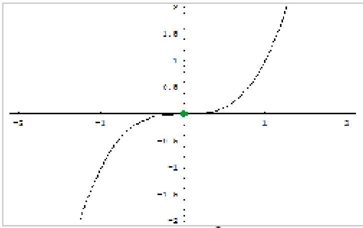
$$f(x) = x^3.$$

We berekenen de eerste afgeleide, stellen deze gelijk aan 0 en lossen op naar x om mogelijke extrema te zoeken

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Om na te gaan of er in dit punt een extremum bereikt wordt bepalen we het teken van de tweede afgeleide in dit punt.

$$f''(x) = 6x$$
$$f''(0) = 0 \Rightarrow \text{ geen extremum (maar een buigpunt) } \textit{(groen)}$$



Grafiek van de functie *f*(*x*) = x^3

Vermits voor elk extremum moet gelden dat de afgeleide 0 is kunnen we besluiten dat deze functie geen extrema heeft.

Nog een paar oefenopgaven m.b.t. differentiëren

Opgave 1.

Geef van de volgende functies de afgeleide functie:

a. $f(x) = \dfrac{5}{x^3}$

b. $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{x}$

c. $f(x) = 4x^2\sqrt{x}$

Opgave 2.

Gegeven de functie $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$

a. Bepaal het functievoorschrift van de hellingsfunctie $f'(x)$

b. Voor welke waarde(n) van x neemt f een minimum aan?

c. Hoe groot is het minimum (2 decimalen nauwkeurig)?

d. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in (-2,-6)

Theorie Wiskunde Optimaliseren

Antw. 1.

a. $f(x)=\frac{5}{x^3}=5\times\frac{1}{x^3}=5\times x^{-3}\rightarrow f'(x)=-15\times x^{-4}=-15\times\frac{1}{x^4}=\frac{-15}{x^4}$

b. $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x}=x^{\frac{1}{2}}-x^{-1}\rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+x^{-2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$

c. $f(x)=4x^2\sqrt{x}=4x^2x^{\frac{1}{2}}=4x^{2\frac{1}{2}}\rightarrow f'(x)=10x^{1\frac{1}{2}}=10x^1x^{\frac{1}{2}}=10x\sqrt{x}$

Antw. 2.

a. $f'(x)=3x^2-4x-7$

b. $f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-4x-7=0$

abc- formule: $x=\frac{4\pm\sqrt{16+84}}{6}=\frac{4\pm10}{6}$

$x=-1$ en $x=2\frac{1}{3}$

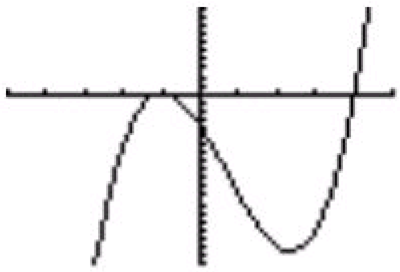
Voor $x=2\frac{1}{3}$ treedt een minimum op.

c. Het minimum is ongeveer -18,52

d. De helling van de raaklijn is f'(-2) = 13.

De vergelijking wordt dus y = 13x + b.

(-2,-6) invullen, levert y= 13x + 20.



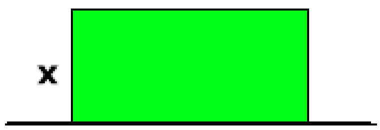
Voorbeeld

"Ik wil de maximale oppervlakte van een rechthoekig veld dat met een schutting van 80 m omheind kan worden, als gebruik wordt gemaakt van een muur die aan de overige zijde staat. Deze muur mag zo lang als nodig."

Uitwerking

Neem voor lengte van de zijde aan de muurkant 'x'. De zijde evenwijdig aan de muur is dan 80-2x. Stel een formule op voor de oppervlakte van het veld, dus:

$O(x)=x\cdot(80-2x)=80x-2x^2$



Bepaal de afgeleide van O(x):

$O'(x)=80-4x$

Bereken x zodat O'(x)=0. Dit geeft x=20. Controleer met een tekenverloop of met je GR dat x=20 inderdaad een maximum van O(x) oplevert.

Antwoord

Voor x=20 heb je de maximale oppervlakte.

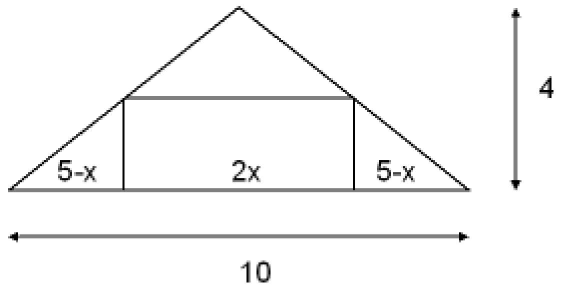
Theorie Wiskunde Optimaliseren

Voorbeeld

Een puntgevel heeft een basis van 10 m en hoogte van 4 m. In de gevel moet een zo groot mogelijk rechthoekig venster komen. Wat zijn de afmetingen van dat venster?

Uitwerking

Maak een tekening en kies (handig) een variabele. In dit geval heb ik voor de lengte van de rechthoek 2x gekozen. Probeer daarna de hoogte uit te drukken in x. Stel een formule op voor de oppervlakte en probeer de oppervlakte te maximaliseren.



$$\frac{5}{4} = \frac{5-x}{h} \Rightarrow 5h = 20 - 4x \Rightarrow h = 4 - \frac{4}{5}x$$

$$O(x) = 2x\left(4 - \frac{4}{5}x\right) = 8x - \frac{8}{5}x^2$$

$$O'(x) = 8 - \frac{16}{5}x$$

$$8 - \frac{16}{5}x = 0$$

$$\frac{16}{5}x = 8$$

$$16x = 40$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

$$\text{Maximale oppervlakte} = 5 \cdot 2 = 10$$

Antwoord

De rechthoek is 5 bij 2