Theorie Logaritme

Gegeven : $3^4=81$
3 mogelijkheden om 1 getal weg te laten en de andere dan te berekenen.
Het weggelaten getal vervangen we dan door x en gaan we isoleren.

$3^4=x$ ➔ $x=3^4$

$x^4= 81$ ➔ $x=\sqrt[4]{81}=81^{\frac{1}{4}}$ want er geldt $\sqrt[p]{a^q}=a^{\frac{q}{p}}$

$3^x=81$ ➔ $x= {}^3\log 81$ want er geldt ${}^p\log q = r$ is andere schrijfwijze voor $p^r=q$

voorbeeld: ${}^{10}\log 100 = 2$ geeft dus $10^2=100$

Op het ZRM zitten 2 logaritmes ${}^{10}\log$ wordt in verkorte notatie geschreven als $\log$
${}^{e}\log$ en wordt in verkorte notatie geschreven als $\ln$

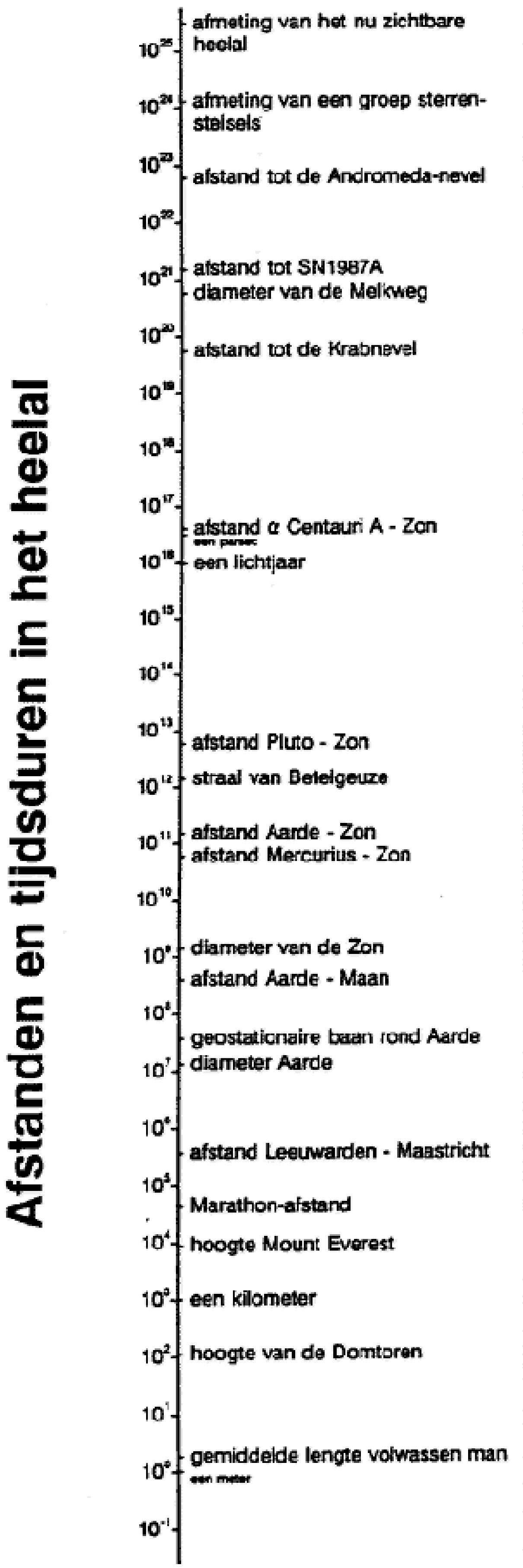
Sterrenkunde is de natuurkunde van alles buiten de aarde. Omdat de natuurwetten op aarde hetzelfde zijn als in de rest van het heelal, is er een sterke wisselwerking tussen de ``aardse" natuurkunde en de sterrenkunde. Resultaten uit het lab, en van de theoretische natuurkunde, kunnen worden toegepast op zaken in het heelal, en omgekeerd voert de natuur in het heelal experimenten uit die in het lab nooit uitgevoerd zouden kunnen worden, en die vragen opwerpen waar we anders nooit zouden zijn opgekomen.

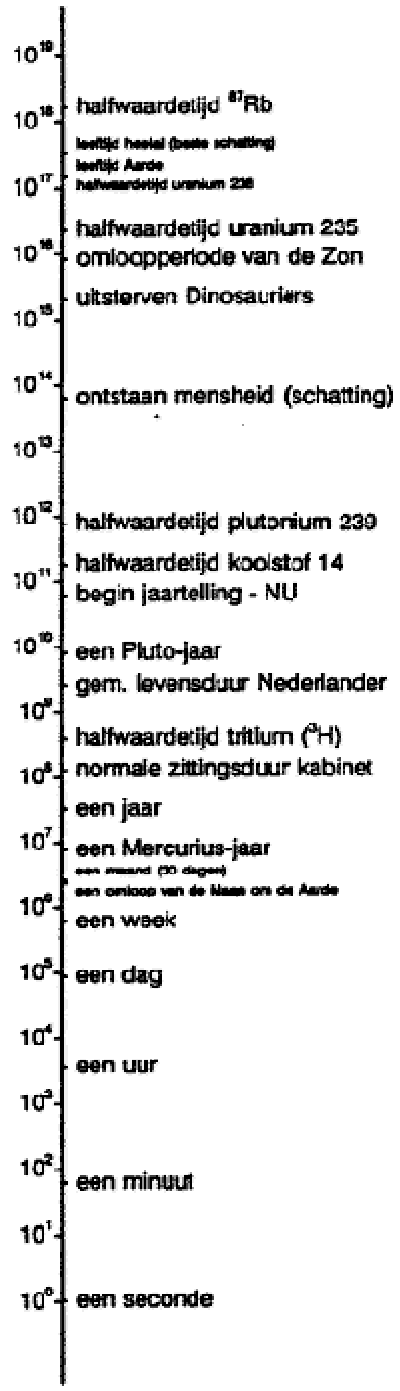
Figuur 1: *Lengte- en tijdschalen.*

Het gaat in de sterrenkunde over objecten die groot en ver verwijderd zijn, en dat beïnvloedt uiteraard de werkwijze van een sterrenkundige. Misschien nog wel belangrijker voor de manier waarop een sterrenkundige denkt zijn echter de enorme schaal*verschillen* (zie figuur). De aarde is $\sim$ 10 000 aardstralen van de zon verwijderd [1], de afstand tot de dichtstbijzijnde ster (Proxima Centauri) is $\sim 10^8$ maal de straal van de zon, enzovoorts. Het zichtbare heelal is zo'n 10^{20} maal zo groot als de aarde. De tijdsduren waar het in de sterrenkunde over gaat hebben een dergelijk dynamisch bereik: de leeftijd van het heelal is tenminste 10^{20} maal zo groot als de tijd waarin sommige neutronensterren (zie §7) eenmaal om hun as wentelen.

Tijd en ruimte zijn in het heelal sterk verknoopt. De eindige lichtsnelheid c zorgt ervoor dat ver afstaande objecten door ons gezien worden zoals ze lang geleden waren. Een veel gebruikte lengte-eenheid is het *lichtjaar*, de afstand die het licht in een jaar aflegt. Daar c ongeveer 300 000 km/s bedraagt, is een lichtjaar ongeveer 365.25 x 24 x 60 x 60 x 300 000 $\approx$ 9.5 10^{12} km. Een ster op x lichtjaar afstand zien we dus zoals hij er x jaar geleden uitzag.

Theorie Logaritme





Bij de linker (logaritmische) schaal staan afstanden in het heelal aangegeven in meters, bij de bovenstaande (logaritmische) schaal staan tijden aangegeven in seconden. Duidelijk is te zien dat in het heelal afstanden een rol spelen die onderling vele ordes van grootte verschillen. Hetzelfde kan van de tijdschalen in het heelal gezegd worden.

Merk op dat de afstandschaal niet doorloopt tot in het domein der (sub)atomaire deeltjes, alhoewel die wel een grote rol spelen bij het ontstaan van het heelal en bij de evolutie van sterren.

Er kunnen ook soortgelijke schalen gemaakt worden voor bijvoorbeeld de massa van voorwerpen (deeltjes, sterren, sterrenstelsels, etc), helderheid van voorwerpen, snelheden, noem maar op. Steeds zie je weer hetzelfde beeld: getallen in de sterrenkunde (en in de natuurkunde) zijn niet alleen groot, ook onderling verschillen ze sterk in grootte. Dit geeft niet alleen begripsmatige problemen, ook rekenapparaten kunnen zich verslikken in getallen die ver uiteenliggen.

Theorie Logaritme

Vervolg:

Rekenregels: $^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$

$$^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \frac{a}{b}$$

$$^{g}\log a^{p} = p \cdot {}^{g}\log a$$

$$^{p}\log q = \frac{^{10}\log q}{^{10}\log p} = \frac{^{e}\log q}{^{e}\log p}$$

vb. $^{3}\log 81 = \frac{\ln 81}{\ln 3} = 4$

Logaritmische schalen.

Het zachtste geluid dat (jonge) mensen nog net kunnen horen is 10-12 W/m². Dit is de gehoordrempel.
Het geluid dat zo hard is dat het het gehoor snel beschadigt en dat pijn doet aan de oren heeft een intensiteit van 100 W/m² (= 140 dB; de pijndrempel volgens BINAS; over waar die pijndrempel precies ligt, kunnen de meningen nogal uiteenlopen, waarschijnlijk is 120 dB een realistischer waarde).
Je ziet dat de intensiteit van dit zeer harde geluid maar liefst 100 biljoen (=100 x miljoen x miljoen) keer zo groot is als de gehoordrempel. We krijgen met wel zeer uiteenlopende intensiteiten te maken.

Als je met een zo groot bereik te maken hebt, is het beter te werken met een logaritmische schaal. Kenmerk van zo'n schaal is:

Eén trede hoger ⇒ grootheid wordt x keer zo groot

Voorbeelden:
Zo iets heb je bij toonhoogte: één octaaf hoger betekent dat de frequentie 2 keer zo groot wordt (dus x = 2).
De schaal van Richter waarmee men de sterkte van aardbevingen kan uitdrukken, is ook logaritmisch: een punt hoger op de schaal betekent dat de energie die bij de aardbeving is vrijgekomen 10 keer zo groot is (dus x = 10).
Bij de pH-schaal, die je in de scheikunde gebruikt, is x = 1/10. Eén punt hoger op de pH-schaal betekent een 10x zo kleine concentratie van de H_3O+ ionen.

De decibelschaal is de logaritmische schaal voor de sterkte van het geluid: 10 decibel (= 1 Bel) hoger op de schaal betekent: de intensiteit is 10 keer zo groot geworden.
Het werken met een logaritmische schaal is daarom realistisch, omdat onze waarneming van geluid (en van licht) ook zo gaat: een 2 keer zo grote intensiteit wordt door ons niet als een twee maal zo hard geluid ervaren, maar als een 'iets harder' geluid.

Om een beetje gevoel voor de decibelschaal te krijgen wat getallen: Geluid van 0 tot 20 dB is in de praktijk nauwelijks te horen omdat geluid uit de natuur en ver verkeersgeluid dit al overstemt. 40 dB is een rustig kantoor, 70 dB is verkeerslawaai langs de weg of een druk

pratende klas, 80 dB is een kroeg of een pauzeruimte in een school, 100 dB is een disco, 110 dB een houseparty. Een startend straalvliegtuig is goed voor 125 dB op 100 m afstand, de pijndrempel (volgens BINAS) ligt bij 140 dB.
Voor geluid vanaf 90 dB zijn gehoorbeschermers wettelijk verplicht. Langdurige blootstelling aan dit geluid kan onherstelbare gehoorbeschadiging (doofheid) veroorzaken. Bij nog hogere geluidsniveaus treedt die gehoorbeschadiging al na veel kortere tijd op.

Opgave Geluidsbox *Auteur: rpn*

Een geluidsbox heeft een vermogen van 10 W. De box staat 1,0 m van mij vandaan.

- Bereken het geluidsniveau bij mijn oren, veronderstellend dat die 10 W op het uitgaande geluid betrekking zou hebben en de box in alle richtingen evenveel uitstraalt.

Uitwerking

Volgens de kwadratenwet is de intensiteit op 1 meter afstand gelijk aan:

$$I = \frac{P_{bron}}{4\pi r^2} = \frac{10}{4\pi \times (1{,}0)^2} = 0{,}796\ Wm^{-2}$$

Het geluidsniveau is dus:

$$L = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10\log\left(\frac{0{,}796}{10^{-12}}\right) = 119\ dB$$

Theorie Logaritme

Opgave verjaardagsfeestje *Auteur: Bart Lindner*

Tijdens een verjaardagsfeestje praten vier dames met elk 40 dB.

a
Bereken het totale geluidsniveau.

b
Er komen nog 5 dames bij. Ieder praat nu met een geluidsniveau van 45 dB. Bereken nu het totale geluidsniveau.

Uitwerking vraag (a)

Elke dame produceert een intensiteit van 10^{-8} W/m^2.
Dus met zijn vieren: $4{,}0.10^{-8}$ W/m^2.
L= $10.\log(4{,}0.10^{-8}/1.10^{-12}) = 46$ dB
(je vindt dit antwoord ook met de vuistregel: 2x zoveel intensiteitè 3 dB erbij; dus 4x zoveel intensiteit geeft 6 dB erbij)

Uitwerking vraag (b)

Per persoon is de intensiteit I te vinden met $I/I_0 = 10^{4,5}$
dus $I = 3{,}16.10^{4} \,.\, 1{,}0.10^{-12} = 3{,}16.10^{-8}$ W/m^2.
In totaal 9 dames, dus $I = 9 \,.\, 3{,}16.10^{-8}$ W/m^2 $= 2{,}85.10^{-7}$ W/m^2.
Het geluidsniveau wordt: L = $10.\ \log(2{,}85.10^{-7}/1.10^{-12}) = 54{,}5$ dus 55 dB.

Verdere informatie over Geluid en decibels

De afkorting dB(A) komt van Decibel: de eenheid van geluidssterkte gemeten via een A-filter. Dit filter meet alleen het toonbereik van het menselijk gehoor.
Wanneer we in een werkplaats te maken hebben met twee geluidsbronnen die elk een geluid produceren van 78 dB(A), kan men de twee geluidsproducties niet gewoon optellen. De geluidsproductie van deze apparaten samen is dus niet 78+78= 156 dB(A), want dit zou ver boven de pijngrens liggen. We kunnen dit via de onderstaande tabel 1 berekenen: de geluidsproductie van deze twee apparaten samen bepalen we door in de tabel het verschil in dB(A) (=0) op te zoeken en een correctiefactor(3) op te tellen bij de hoogste waarde (78): dus 81 dB(A). Gehoorbeschadiging kan men krijgen wanneer men in een omgeving werkt waar het geluid een sterkte heeft van **80 dB(A**) of meer.

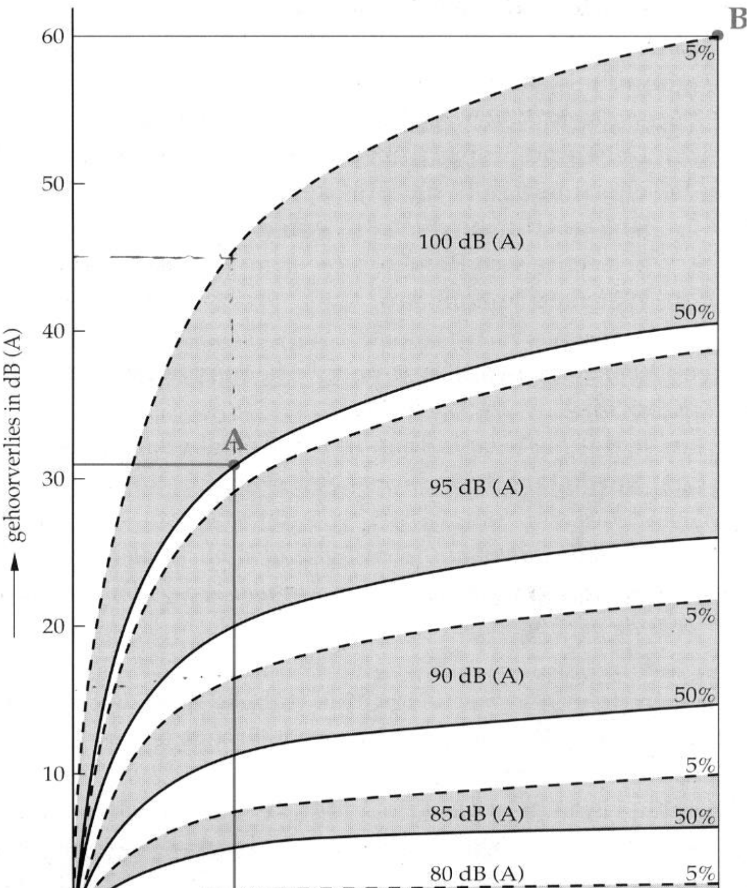
Verschil in dB(A) tussen de twee bronnen	Correctiefactor op te tellen bij de dB(A) waarde
0-1	3
2-3	2
4-8	1
>9	0

Tabel 1

Theorie Logaritme

Geluid heeft verschillende effecten op de mens. Geluid, zeker hard geluid, kan schadelijk zijn voor de mens. Hoge niveaus (hard geluid) zijn schadelijk voor het gehoor en kunnen zelfs tot beschadigingen leiden. Lawaaidoofheid is een fenomeen dat men in de praktijk vaak tegenkomt. Met lawaaidoofheid wordt bedoeld dat van mensen die vaak en langdurig aan hard geluid staan blootgesteld, het gehoor steeds een beetje wordt beschadigd, waardoor men steeds minder hoort. In de loop der tijd wordt men dan heel langzaam doof. Hiernaast zie je een figuur die het verband geeft tussen gehoorverlies in dB(A) en de blootstelling in jaren.
Iemand die 10 jaar wordt blootgesteld aan 100dB(A) heeft 50% kans dat hij een gehoorsverlies kent van 32 dB(A). Een op de twintig mensen (5%) heeft zelfs kans op een gehoorsverlies van 45 dB(A).

Het belangrijkste effect van lawaai is dat het gehoor beschadigd kan worden (lawaaidoofheid). Naast geleidelijk optreden als resultaat van een langdurige blootstelling aan te hoge lawaainiveaus zoals deze onder andere in de industrie voor kunnen komen kan dat ook acuut plaatsvinden door geluiden van een zeer hoge intensiteit zoals explosies.
Naast deze gevaren voor het lichamelijke, is hard geluid ook een storende factor bij het voeren van gesprekken. Ook kan het mensen afleiden als zij zich willen of moeten concentreren op het werk dat zij aan het doen zijn. Het bevorderen van een goede spraakverstaanbaarheid voorkomt onnodige inspanning en vergissingen.
Zeker wanneer de informatie ingewikkeld en onbekend is, moet zonder stemverheffing kunnen worden gesproken. Te veel lawaai vermindert de concentratie. Dit betekent vermoeidheid, hoofdpijn en vermindering van de oplettendheid. In tabel 2 zijn een aantal geluidssterktes opgenomen met de bron die deze veroorzaken. Hiermee kunt u de geluidssterktes vergelijken en nagaan waar u aan blootgesteld bent.



Tabel2   Geluidsniveaus van verschillende bronnen

Theorie Logaritme

Geluidsbron	*Geluidsniveau*	*Zone*
	dB(A)	
Absolute stilte (per definitie)	0	Zacht
Bladgeritsel	10	
Geluidsstudio	20	
Zacht gefluister	30	Rustig
Zacht praten op 5 m	40	
Sporthal	50	
Warenhuis	60	Vermoeiend
Personenauto	70	
Zeer druk verkeer	80	
Zware vrachtauto	90	
Staalconstructiebedrijf	100	Hinderlijk
Steenboor	110	
Propellervliegtuig	120	
Straalvliegtuig	130	Gevaarlijk
Luide popgroep(pijngrens)	140	

Geluidssnelheid

Geluid verplaatst zich met verschillende snelheden door stoffen. In onderstaande tabel zie je de verschillende geluidssnelheden bij vaste stoffen, vloeistoffen en gassen. Verder zie je dat de geluidssnelheid afhankelijk is van de temperatuur. Hierbij geldt dat hoe hoger de temperatuur is hoe sneller het geluid wordt. Dit laatste wordt geregeld door de volgende formule

$$V_T = V_{15\,of\ 0\ ^oC} * \sqrt{\frac{T}{288\,of\ 273}}$$

Hierbij is T de temperatuur in Kelvin. In tegenstelling tot de Celsius schaal die zowel positief als negatief kan zijn is de temperatuursschaal Kelvin alleen maar positief daarom begint deze schaal op de laagste temperatuur te tellen. We noemen dit het absolute nulpunt. Dit is de laagste temperatuur die we kennen in de natuurkunde. Dit absolute nulpunt is –273 ^oC. Willen we dus de temperatuur vanuit Celsius omrekenen naar Kelvin dan moeten we de Celsius tempratuur met 273 verhogen. In formule vorm is dat:

$$T(K) = T(^oC) + 273$$

Uiteraard is de geluidssnelheid in lucht voor ons de belangrijkste maat. Deze maat bepaalt in de luchtvaart o.a. of iets sneller dan het geluid vliegt. Dit wordt kortweg dan ook aangegeven met een vliegtuig vliegt met mach 2. Dit betekent dat het vliegtuig met twee keer de geluidssnelheid vliegt.

Geluidssnelheid bij verschillende stoffen

Vaste stoffen bij 15^{o}C m/s		Vloeistoffen stoffen bij 15^{o}C m/s		Gassen bij 0^{o}C m/s	
Aluminium	5100	Alcohol	1200	Helium	965
Glas	4200	Benzeen	1320	Koolstofdioxide	259
Hout	2700	Glycerol	1930	Lucht	331
Koper	3700	Kwik	1450	Zuurstof	316
Kurk	500	Olie	1500		
Marmer	3800	Terpentine	1220		
PVC	900	Water	1480		
Rubber	50				
Staal	5100				

Theorie Logaritme

Steen	3600
Zilver	2700

Gehoorbescherming

Voorgevormde oordopjes

Voorgevormde oordopjes zijn gemaakt van buigzaam, elastisch, rubber of kunststof, dat de gehoorgang luchtdicht afsluit. Oordopjes kunnen los of met een draagbeugel worden uitgevoerd. Het voordeel van een draagbeugel is dat deze minder snel kwijt raakt. Bovengenoemde oordopjes zijn geschikt voor meermalig gebruik.

De maat van het oordopje is erg belangrijk: een te klein oordopje veroorzaakt een geluidslek en een te groot oordopje vermindert het draagcomfort.

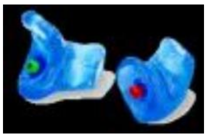
Rolletjes van schuimplastic

Oorrolletjes van geschuimd polymeer zijn één van de meest gebruikte gehoor-beschermingsmiddelen. Het rolletje wordt eerst met de vingers ineengedrukt en vervolgens in de gehoorgang gebracht. In de gehoorgang zet het rolletje binnen enkele seconden uit en neemt de vorm van de gehoorgang aan. Het draagcomfort wordt veelal als goed aangegeven, terwijl er weinig klachten worden geuit met betrekking tot irritatie van de gehoorgang.

Otoplastieken

Otoplastieken zijn geheel op maat gemaakt (aangepast aan de individuele vorm van de gehoorgang), dus comfortabel en ingesteld naar de omstandigheden.
Enkele voordelen ten opzichte van andere gehoorbeschermingsmiddelen zijn:

- onmogelijkheid om ze verkeerd in te brengen;
- geen hinder van irritante dreun of bonzen;
- de spraakverstaanbaarheid blijft;
- makkelijk schoon te houden;
- gebruiksperiode twee tot vier jaar, dure aanschaf/lange levensduur;
- relatief goedkoop.



Oorkappen

De oorkap bestaat uit twee schelpen die verbonden worden door een verstelbare beugel. Goed passende oorkappen hebben een zeer goede geluidsdemping. De schelp van de oorkap moet het oor geheel omsluiten en goed aansluiten langs het hoofd.

Theorie Logaritme

Overzicht van gehoorbeschermingsmiddelen
Een globaal overzicht van drie praktische eigenschappen van enkele gehoorbeschermingsmiddelen is weergegeven in de tabel.
Toelichting bij tabel:
A. Eenvoud van het gebruik (- = niet erg eenvoudig, + = eenvoudig)
B. Gebruikscomfort (+ = goed, +/- = kan klachten geven)
C. Kwaliteit van de verzwakking in relatie tot het geluidsniveau op de werkplek

++ = geeft voldoende verzwakking
+ = geeft voldoende verzwakking mits zorgvuldig geselecteerd
- = geeft onvoldoende verzwakking

middel	A. eenvoud	B. comfort	C. Demping in dB(A)		D. geluidsniveau in dB(A)			
			Slecht passend	Goed passend	80-90	90-95	95-100	100-110
Oordopjes	-	+/-	5	10-15	++	+	-	-
Schuimplastic rolletjes	-	+/-	10	10-20	++	++	+	-
Otoplastieken	-	+	-	15-20	++	++	+	+
Oorkap	+	+/-	10	15-25	++	++	+	+

Tabel 3: Gehoorbeschermingsmiddelen die gebruikt kunnen worden in relatie tot het geluidsniveau op de werkplek, het geboden comfort en eenvoud van gebruik.

Theorie Logaritme

Rekenregels: $^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$

$$^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \frac{a}{b}$$

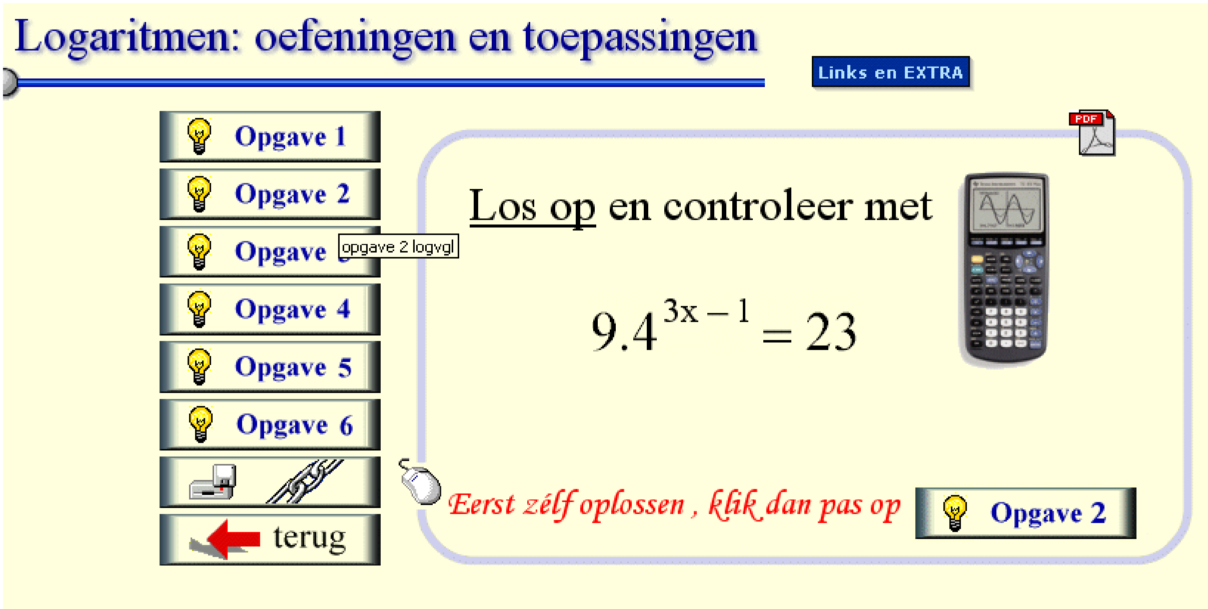
$$^{g}\log a^{p} = p \cdot {}^{g}\log a$$

$$^{p}\log q = \frac{^{10}\log q}{^{10}\log p} = \frac{^{e}\log q}{^{e}\log p}$$

vb. $^{3}\log 81 = \frac{\ln 81}{\ln 3} = 4$

Theorie Logaritme

Voorbeelden !! → Lastig



Oplossing:

→

$$9.4^{3x-1} = 23$$

$$\Leftrightarrow \log 9 + \log 4^{3x-1} = \log 23$$

$$\Leftrightarrow \log 9 + (3x-1)\log 4 = \log 23$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)\log 4 = \log 23 - \log 9$$

$$\Leftrightarrow 3x-1 = \frac{\log 23 - \log 9}{\log 4}$$

$$\Leftrightarrow 3x = 0,676819 + 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1,676819}{3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = 0,5589}$$

Theorie Logaritme

Los op en controleer met

$$3^{4x+5} = 5^{x-1}$$

Oplossing:

$$\rightarrow \quad 3^{4x+5} = 5^{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \log 3^{4x+5} = \log 5^{x-1} \quad (\text{logaritme invoeren})$$

$$\Leftrightarrow (4x+5).\log 3 = (x-1).\log 5 \quad (\text{logaritme v/e macht})$$

$$\Leftrightarrow 4x.\log 3 + 5.\log 3 = x.\log 5 - \log 5 \quad (\text{uitwerken})$$

$$\Leftrightarrow 4x.\log 3 - x.\log 5 = -5.\log 3 - \log 5$$

$$(\text{termen in } x \text{ samenplaatsen in linkerlid !!})$$

$$\Leftrightarrow x.(4.\log 3 - \log 5) = -5.\log 3 - \log 5 \quad (x \text{ afzonderen})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5.\log 3 - \log 5}{4.\log 3 - \log 5} \quad (\text{Bereken met GRM})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = -2{,}5503}$$