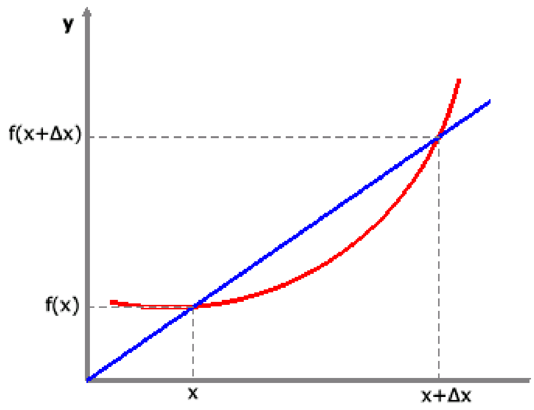
Theorie Differentiëren

Differentiequotiënt

Definitie

Laat *f*: **R**→**R** een continue functie zijn. We bekijken een lijn door twee vlak bij elkaar liggende punten op de grafiek van *f*: het punt $(x, f(x))$ en het punt $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$. Het verschil tussen de *x*-coördinaten van deze punten is Δx en het verschil tussen hun *y*-coördinaten is $\Delta f = \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. De helling van de lijn door deze twee punten is

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

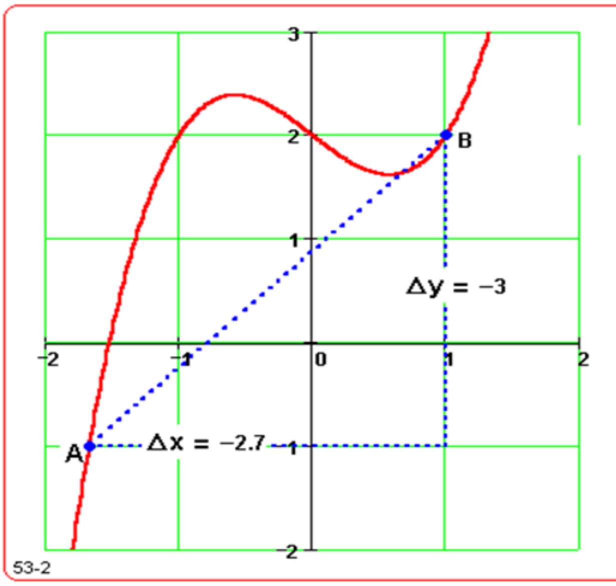


Voor het quotiënt $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ bestaan verschillende benamingen:

- de **helling** van lijn door de punten $(x, f(x))$ en $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$
- de **gemiddelde toename** van $f(x)$ op het interval $[x, x + \Delta x]$
- de **richtingscoëfficiënt** van de lijn door de punten $(x, f(x))$ en $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$
- het **differentiequotiënt** van $f(x)$ over het interval $[x, x + \Delta x]$

Δf is de toename van de y-coördinaat, daarom schrijven we in plaats van Δf ook vaak Δy. Het differentiequotiënt wordt dan genoteerd als $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

De berekening van het differentiequotiënt vanuit een grafiek:



$A = (-1.7\,,\ -1)$

$B = (1\,,\ 2)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - (-1)}{1 - (-1.7)} = \frac{3}{2.7} = 1.11$$

Theorie Differentiëren

Voorbeeld berekening als functie is gegeven.

Berekening van uit het functievoorschrift:

$f(x) = x^2 + 5 \cdot x - 4$

Bereken het differentiequotiënt op [-3 , 7]

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-3) - f(7)}{-3 - 7} = \frac{(-3)^2 + 5 \cdot -3 - 4 - \left(7^2 + 5 \cdot 7 - 4\right)}{-10} = \frac{-10 - 80}{-10} = \frac{-90}{-10} = 9$$

Voorbeeld

Bereken het differentiequotient van f over het interval [1,5] met $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

Oplossing

$f(5) = 5^2 - 2.5 + 3 = 18$

$f(1) = 1^2 - 2.1 + 3 = 2$

dus diff.quot. = (18-2)/(5-1) = 4

Deze uitkomst kun je vertalen als: 4 is de richtingscoefficient van de lijn die gaat door (1,2) en (5,18).

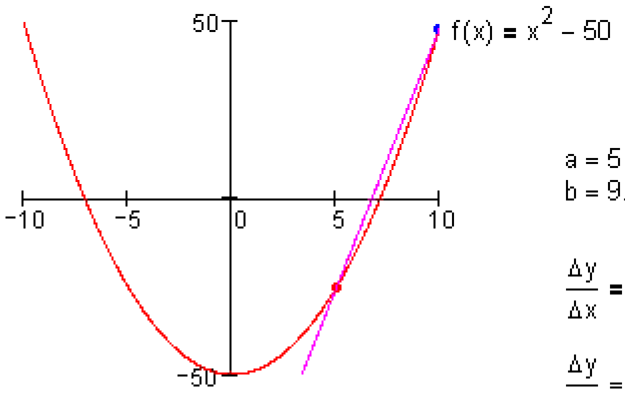
Afgeleide of Differentiaalquotiënt

We definiëren de afgeleide van *f* in *x* als de volgende limiet, onder de voorwaarde dat deze bestaat:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Als deze limiet bestaat, noemen we *f* differentieerbaar in *x*.

Voorbeeld als noemer naar 0 gaat. Welke grenswaarde wordt dan bereikt ?



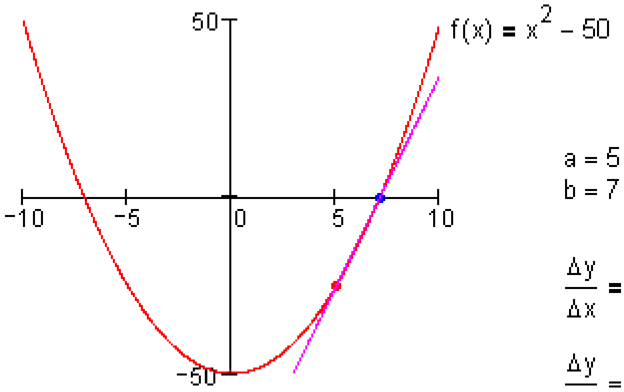
a = 5 f(a) = −25

b = 9.9 f(b) = 48

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 14.9$$

Theorie Differentiëren

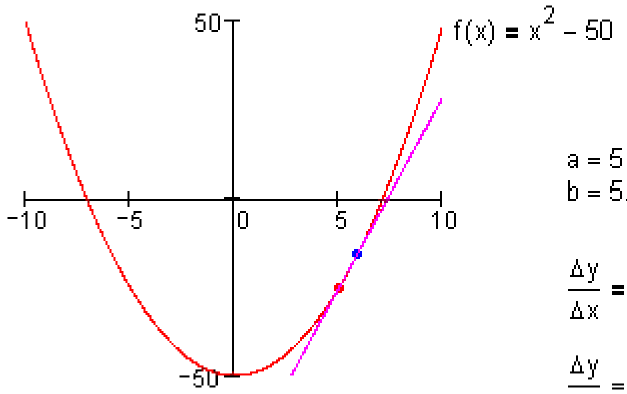


$a = 5$ $\quad f(a) = -25$

$b = 7$ $\quad f(b) = -0.3$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 12$$

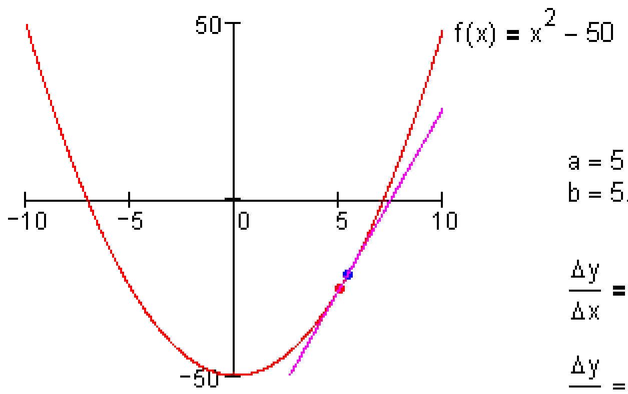


$a = 5$ $\quad f(a) = -25$

$b = 5.8$ $\quad f(b) = -15.9$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 10.8$$



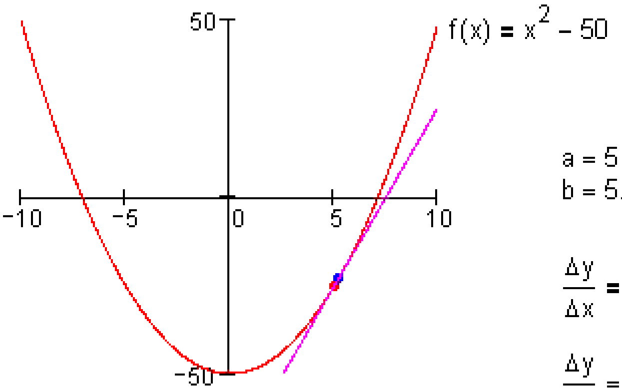
$a = 5$ $\quad f(a) = -25$

$b = 5.3$ $\quad f(b) = -21.5$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 10.3$$

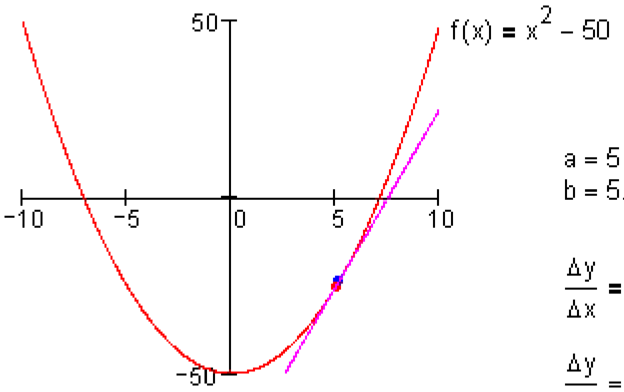
Theorie Differentiëren



$a = 5$ $\quad f(a) = -25$
$b = 5.2$ $\quad f(b) = -23.2$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 10.2$$



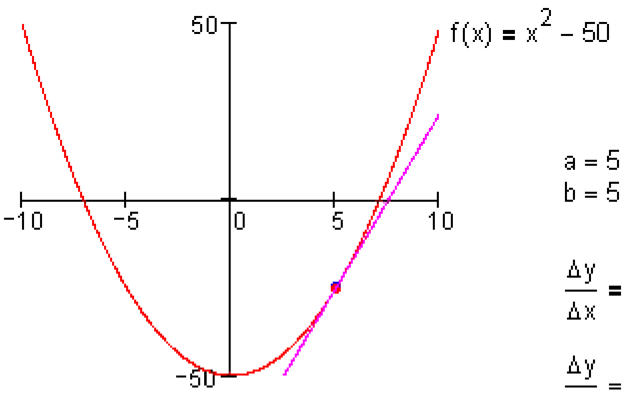
$a = 5$ $\quad f(a) = -25$
$b = 5.1$ $\quad f(b) = -23.9$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 10.1$$

Let op:

a=5 en b=5 kun je niet tegelijk invullen want dan wordt de noemer nul.
Uit bovenstaande berekeningen is de verwachting dat de limiet naar 10 gaat.
Precies moet je de berekening maken met een limiet !!!



$a = 5$ $\quad f(a) = -25$
$b = 5$ $\quad f(b) = -25$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

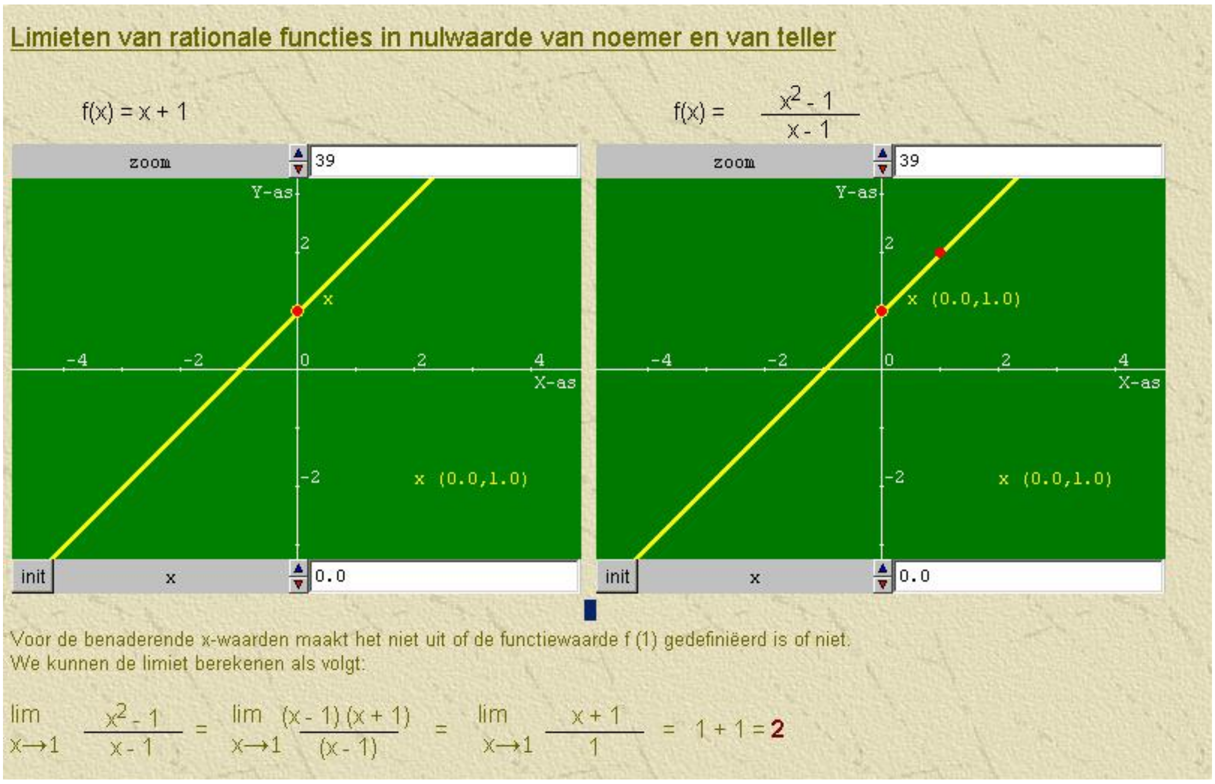
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 10$$

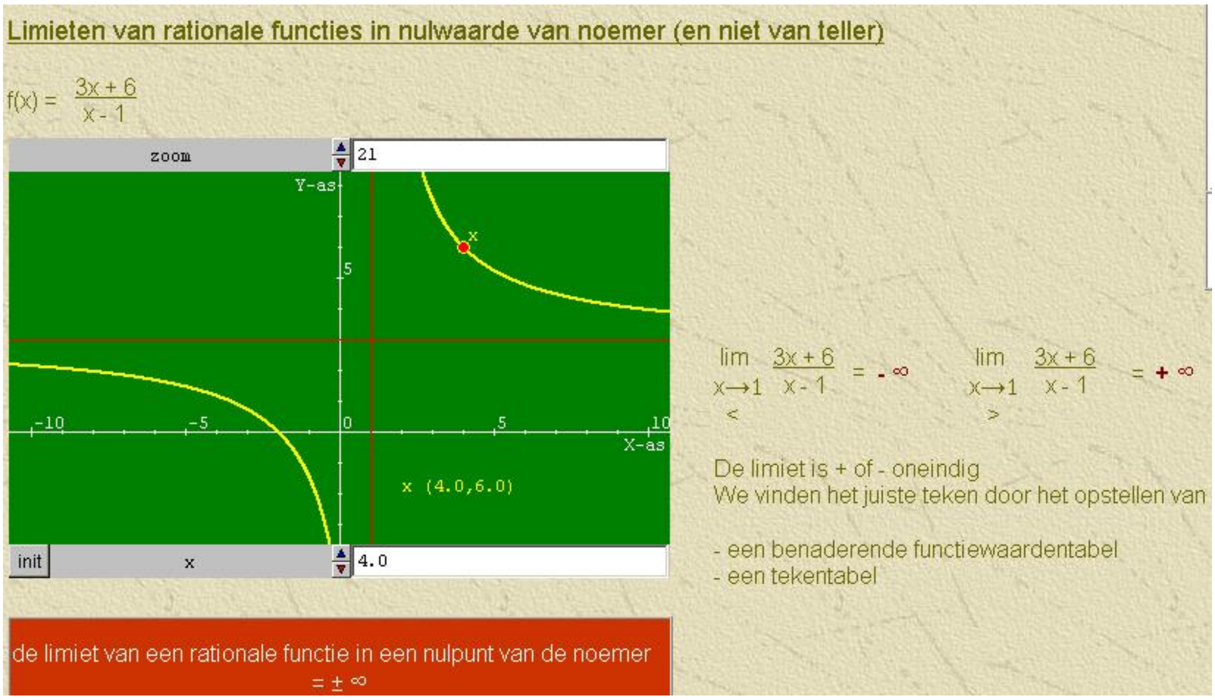
Theorie Differentiëren

Voordat een berekening volgt van een differentiaalquotiëntberekening voorbeelden van limietberekeningen.

Twee mogelijkheden

a. Grafiek tekenen en daaruit de limiet aflezen.



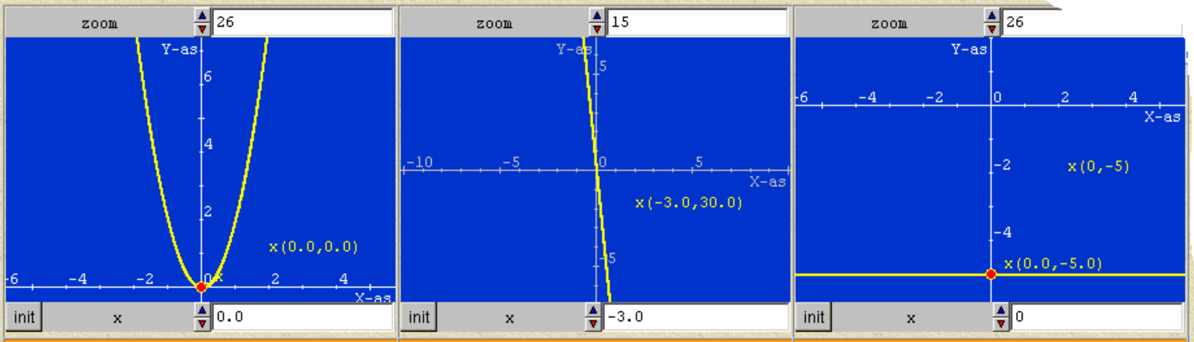


Theorie Differentiëren

Veeltermfuncties: gedrag op oneindig

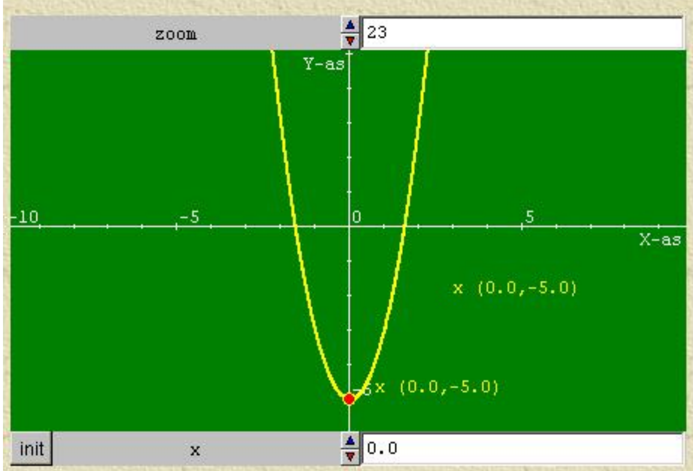
$f(x) = 2x^2 - 10x - 5$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty}$?

Wat gebeurt er wanneer de x-waarde nadert naar plus oneindig?
Bekijken we de drie termen apart, dan krijgen we het volgende:



$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} -10x = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} -5 = -5$

Bekijken we de veeltermfunctie, dan krijgen we het volgende:



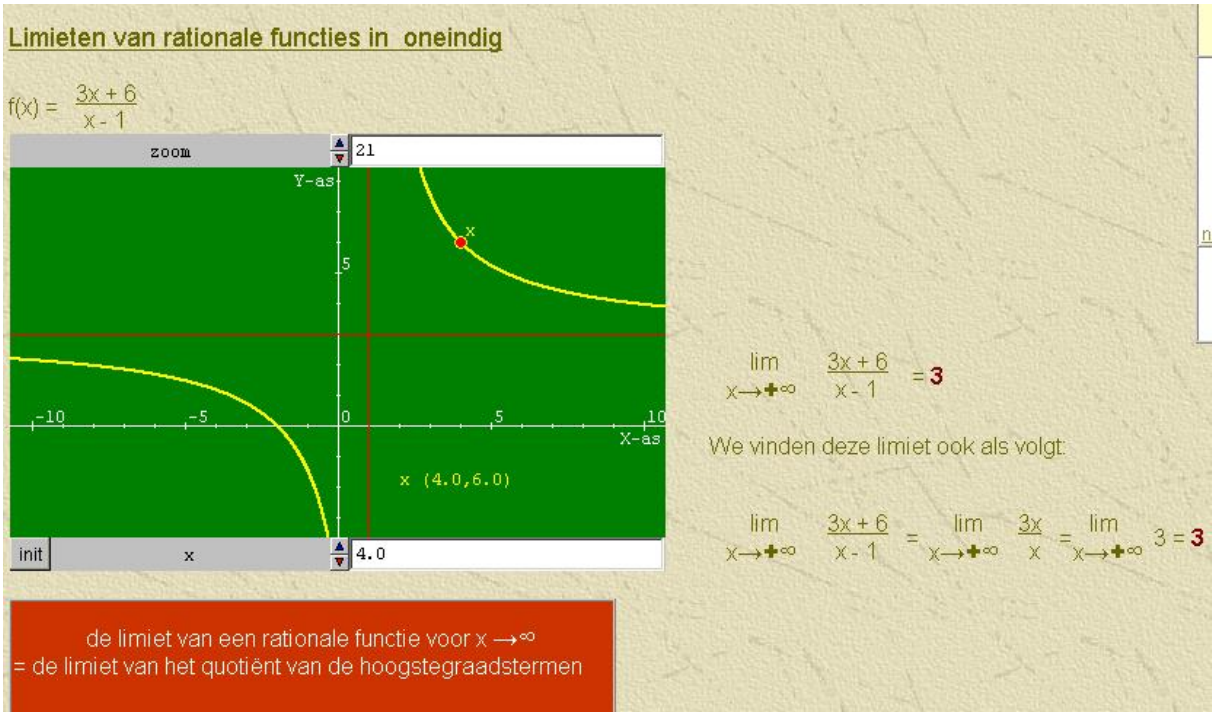
$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^2 - 10x - 5 = +\infty$

de limiet van de veeltermfunctie is dezelfde als

de limiet van de hoogstegraadsterm

de limiet van een veeltermfunctie voor $x \to \infty$
= de limiet van de hoogstegraadsterm

Theorie Differentiëren



b. Limietenberekeningen zonder de grafieken eerst te tekenen.
   Op onderstaande site staan oefeningen met de uitwerkingen.

Voorbeeld van berekening differentiaalquotiënt

Theorie Differentiëren

Definitie

De afgeleide f'(x) wordt gedefinieerd als:

$$f'(x) = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{f(x + \Delta h) - f(x)}{\Delta h}$$

Voorbeeld

$f : y = x^2 - 4x + 4$

$$f'(x) = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{f(x + \Delta h) - f(x)}{\Delta h} =$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{(x + \Delta h)^2 - 4(x + \Delta h) + 4 - \left(x^2 - 4x + 4\right)}{\Delta h} =$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{x^2 + 2 \cdot \Delta h \cdot x + (\Delta h)^2 - 4x - 4 \cdot \Delta h + 4 - x^2 + 4x - 4}{\Delta h} =$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2 \cdot \Delta h \cdot x + (\Delta h)^2 \cancel{-4x} - 4 \cdot \Delta h + \cancel{4} \cancel{-x^2} + \cancel{4x} \cancel{-4}}{\Delta h} =$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{2 \cdot \Delta h \cdot x + (\Delta h)^2 - 4 \cdot \Delta h}{\Delta h} =$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta h \to 0} 2 \cdot x + \Delta h - 4 =$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

Vooral in het laatste stukje zit een 'aardige' wending. Omdat Δh niet nul is mag je in de teller en noemer deze factor wegdelen. In de stap daarna zeg je dan dat Δh nadert naar nul, dus kunnen we deze term weglaten.

De **afgeleide** of **hellingsfunctie** (in dit voorbeeld f'(x)=2x-4) geeft voor elk waarde van 'x' de helling in het punt (x,f(x)) van de functie f.

Conclusie:

Indien f'(x)=0 loopt de raaklijn evenwijdig aan de x-as.
In de praktijk heeft de grafiek daar een maximum, minimum of buigpunt.

Rekenregels

Om van een functie de afgeleide te bepalen met de definitie is een flink karwei.

Theorie Differentiëren

Hiertoe heeft men rekenregels opgesteld. We gaan deze niet bewijzen !

Differentieren

De regels voor differentieren zijn:

$f(x) = a$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n.x^{n-1}$
$f(x) = g(x) + h(x)$ (somregel)	$f'(x) = g'(x) + h'(x)$
$f(x) = g(x) * h(x)$ (produktregel)	$f'(x) = g'(x)*h(x) + g(x)*h'(x)$
$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$	$f'(x) = \frac{g'(x)*h(x) - g(x)*h'(x)}{(h(x))^2}$
$h(x) = f(g(x))$ (kettingregel)	$h'(x) = f'(g(x))*g'(x)$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $[f(x) = x^{-n}]$	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$ $[f'(x) = -nx^{-n-1}]$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = \ln a * a^x$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = {}^a\log x$	$f'(x) = \frac{1}{\ln a} * \frac{1}{x}$

Voorbeeld

Bepaal de afgeleide van de functie f, met als functievoorschrift

$$f(x) = 26 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 + 89 \cdot x + 15.$$

Toepassen van de differentieerregels levert voor alle x

$$f'(x) = 26 \cdot 3 \cdot (x)^{3-1} + 4 \cdot 2 \cdot (x)^{2-1} + 89 \cdot (x)^{1-1} + 0.$$

Uitwerken levert dan:

$$f'(x) = 78 \cdot x^2 + 8 \cdot x + 89.$$

Voorbeeld

Theorie Differentiëren

Bepaal de afgeleide van de functie f, met als functievoorschrift

$$f\left(x\right) = 29 \cdot x^3 + 99 \cdot x^2 + 43 \cdot x + 10.$$

Toepassen van de differentieerregels levert voor alle x

$$f'\left(x\right) = 29 \cdot 3 \cdot \left(x\right)^{3-1} + 99 \cdot 2 \cdot \left(x\right)^{2-1} + 43 \cdot \left(x\right)^{1-1} + 0.$$

Uitwerken levert dan:

$$f'\left(x\right) = 87 \cdot x^2 + 198 \cdot x + 43.$$

Theorie Differentiëren

Quotiëntregel

Als $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 2}$ dan:

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x^2 - 2) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4 - 4x^2}{(x^2 - 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - 4}{(x^2 - 2)^2}$$

Nog een voorbeeld

Bepaal de afgeleide van: h(x)= (5x+3)/(2x+4)

Oplossing: $h'(x) = \dfrac{(2x+4).5 - (5x+3).2}{(2x+4)^2} = \dfrac{14}{(2x+4)^2}$

Productregel

Voorbeelden:

- $f(x)=(x^2+2)(2x-1)$
  $f'(x)=(x^2+2)\cdot 2+2x\cdot(2x-1)$
- $g(x)=(x^2+2x+3)(x^2-4x+8)$
  $g'(x)=(x^2+2x+3)(2x-4)+(2x+2)(x^2-4x+8)$
- $h(x)=(1-x)\cdot x^2$
  $h'(x)=(1-x)\cdot 2x+-1\cdot x^2=2x-2x^2-x^2=1-3x^2$

Gebroken en negatieve exponenten

Bepaal de afgeleide van:

$f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = 2\sqrt[3]{x}$

$h(x) = x^3\sqrt{x}$

Uitwerking

Theorie Differentiëren

$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$g(x) = 2\sqrt[3]{x} = 2 \cdot x^{\frac{1}{3}}$

$g'(x) = 2 \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$h(x) = x^3\sqrt{x} = x^{3\frac{1}{2}}$

$h'(x) = 3\frac{1}{2}x^{2\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{2}x^2x^{\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{2}x^2\sqrt{x}$